

## 6. Vincent's proof revisited in modern terms

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. VINCENT'S PROOF REVISITED IN MODERN TERMS

The 'qualitative' argument used by Vincent to prove his theorem can easily be recast in modern terms to obtain Uspensky's result, but under the only condition that

$$F_h F_{h-1} \Delta > 1 + \frac{1}{\varepsilon_n} .$$

In view of the fact that Viète's formulae relate the coefficients of a polynomial to its roots, it is far from astonishing that Vincent's proof can be improved to provide a quantitative estimate for  $h$ . But it is worthwhile to observe that it gives exactly Uspensky's result.

Consider once again the proof of Theorem 4.1 up to (4.3), which describes the polynomial  $G(x)$ .

Factoring out  $g(b)$  we have

$$G(x) = (x+1)^{n-1} g(b) \left[ 1 + \frac{g'(b)}{1! \cdot g(b)} u + \frac{g''(b)}{2! \cdot g(b)} u^2 + \dots + \frac{g^{(n-1)}(b)}{(n-1)! \cdot g(b)} u^{n-1} \right] .$$

Recalling that  $u = \frac{a-b}{1+x}$ , we have

$$(6.1) \quad \frac{G(x)}{g(b)} = (x+1)^{n-1} + \frac{g'(b)}{1! \cdot g(b)} (a-b)(x+1)^{n-2} + \dots + \frac{g^{(n-1)}(b)}{(n-1)! \cdot g(b)} (a-b)^{n-1} .$$

Since the roots of  $g(x)$  are  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{g'(x)}{1! \cdot g(x)} &= \sum_i \frac{1}{1!} \frac{1!}{x-x_i} = \sum_i \frac{1}{x-x_i} , \\ \frac{g''(x)}{2! \cdot g(x)} &= \sum_{i,j} \frac{1}{2!} \frac{2!}{(x-x_i)(x-x_j)} = \sum_{i,j} \frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)} , \\ \frac{g'''(x)}{3! \cdot g(x)} &= \sum_{i,j,k} \frac{1}{3!} \frac{3!}{(x-x_i)(x-x_j)(x-x_k)} = \sum_{i,j,k} \frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)(x-x_k)} , \\ &\dots \end{aligned}$$

The above sums contain respectively  $\binom{n-1}{1}$ ,  $\binom{n-1}{2}$ ,  $\binom{n-1}{3}$ , ... terms.

Since  $F_h F_{h-1} \Delta > 1 + \frac{1}{\varepsilon_n} > 1$ , we have, in particular,  $|b-a| < \Delta$ . Hence

$$|b - a| = \theta \cdot \Delta, \quad \text{with } \theta < 1.$$

Observe that

$$|b - x_i| = |b - x_0 + x_0 - x_i| > |x_0 - x_i| - |b - x_0| > \Delta - \theta\Delta = (1 - \theta)\Delta;$$

hence

$$\left| \frac{g^{(k)}(b)}{k! \cdot g(b)} \right| < \binom{n-1}{k} \frac{1}{(1-\theta)^k \Delta^k},$$

and

$$\left| \frac{g^{(k)}(b)}{k! \cdot g(b)} (a - b)^k \right| < \binom{n-1}{k} \frac{1}{\Delta^k} \Delta^k \cdot \frac{\theta^k}{(1-\theta)^k} = \binom{n-1}{k} \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right)^k.$$

Let  $\frac{\theta}{1-\theta} = \tau$ . The absolute value of the coefficient of  $x^i$  on the right hand side of (6.1) is smaller than

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{1} \binom{n-2}{i} \tau + \binom{n-1}{2} \binom{n-3}{i} \tau^2 \\ & + \binom{n-1}{3} \binom{n-4}{i} \tau^3 + \dots = \sum_{k=0}^{n-1-i} \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{i} \tau^k \\ & = \binom{n-1}{i} (1 + \tau)^{n-1-i} = \binom{n-1}{i} \left( \frac{1}{1-\theta} \right)^{n-1-i}. \end{aligned}$$

To apply Lemma 5.1 we need to impose the condition

$$(6.2) \quad \left| \left( \frac{1}{1-\theta} \right)^{n-1-i} - 1 \right| < \frac{1}{n} \quad \forall i,$$

which is equivalent to

$$\left( \frac{1}{1-\theta} \right)^{n-1} < 1 + \frac{1}{n},$$

that is

$$(6.3) \quad \theta < 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n}.$$

It follows from

$$F_h F_{h-1} \Delta > 1 + \frac{1}{\varepsilon_n}$$

that

$$q_h q_{h-1} \Delta = \frac{\Delta}{|b-a|} = \frac{1}{\theta} > 1 + \frac{1}{\varepsilon_n},$$

hence (6.3) holds and (6.2) is satisfied. Lemma 5.1 may be applied to conclude the proof.  $\square$