

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE*)

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

RÉSUMÉ. Ce texte est une introduction à la mécanique semi-classique à l'usage des non-spécialistes.

Après avoir rappelé les contextes de la mécanique classique (géométrie symplectique) et de la mécanique quantique, on introduit la mécanique semi-classique à partir d'exemples simples : transformations de Fourier et de Legendre, principe de Huygens.

On décrit ensuite les formules de trace semi-classiques et la problématique du *chaos quantique*.

1. INTRODUCTION

Le but de ces exposés est de servir de motivation et d'introduction au sujet. Du point de vue de la physique, il s'agit de techniques qui remontent au début de la mécanique quantique : le *principe de correspondance* affirme de façon vague que *la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck \hbar peut être considérée comme petite*, autrement dit que les actions S en jeu sont grandes devant \hbar . Bien sûr, dire qu'une théorie physique est une limite d'une autre théorie physique est un concept important puisqu'une grande partie du savoir faire du physicien est de prévoir ce qui est petit et ce qui est grand. La limite *quantique-classique* est plus complexe que la limite *relativiste-galiléen* qui se réduit essentiellement à des développements limités en $\frac{1}{c}$, où c est la vitesse de la lumière.

Depuis le début de la mécanique quantique, le passage à la limite semi-classique est traité par des règles plus ou moins empiriques : les développements BKW (Brillouin-Kramers-Wentzel) et les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld font ainsi partie de l'outillage de base du

*) Rédaction d'exposés donnés dans le cadre de rencontres Genève-Grenoble-Lyon (24 et 25 avril 1997)

physicien quantique. Ces méthodes ont leurs limitations intrinsèques : difficultés liées aux caustiques, impossibilité de dire quelque chose de précis sur les spectres dans les cas non complètement intégrables (i.e. génériques).

Du point de vue mathématique, les travaux de Maslov, Leray, Hörmander en équations aux dérivées partielles linéaires (analyse *micro-locale*), dans les années 65-70, ont donné une assise naturelle et solide aux calculs des physiciens. En particulier, ces méthodes permettent de décrire de façon précise le passage des caustiques et la nature des déphasages des fonctions d'ondes en ces points (indice de Maslov).

L'application de ces méthodes aux équations de Schrödinger et à la limite géométrique de l'optique ondulatoire a connu un grand développement depuis les années 70. Ces travaux s'appuient sur des résultats de plus en plus fins de mécanique classique des systèmes hamiltoniens (systèmes complètement intégrables, théorie KAM, flots d'Anosov) en même temps que sur des techniques d'analyse variées (intégrales oscillantes, estimations de type elliptique, développements asymptotiques, méthodes de resommation, passage dans le complexe). Un des problèmes clés est l'étude semi-classique des spectres d'opérateurs : asymptotique des grandes valeurs propres des laplaciens riemanniens, asymptotique du spectre d'un opérateur de Schrödinger lorsque $\hbar \rightarrow 0^+$.

Après avoir brièvement rappelé le formalisme hamiltonien et le formalisme quantique, je décrirai le problème de la limite semi-classique.

Je parlerai ensuite du spectre : depuis le cas complètement intégrable, en passant par KAM, j'en viendrai à ce que je considère comme l'un des plus jolis résultats de la théorie, la formule des traces dite de Gutzwiller dont je donnerai une preuve heuristique basée sur l'intégrale de Feynman.

Je parlerai enfin de l'analyse fine du spectre semi-classique et du lien avec la théorie des matrices aléatoires.

Je veux profiter de l'occasion pour introduire deux idées que je trouve stimulantes et que je vous soumetts :

1) La mécanique classique est certes une limite de la mécanique quantique, mais la mécanique quantique est aussi un système hamiltonien classique particulier (linéaire) et la dimension infinie n'en est pas le fait le plus important.

2) La limite semi-classique est habituellement présentée comme liée au caractère linéaire de la mécanique quantique et dépendant essentiellement du principe de superposition (phase stationnaire) : elle est aussi liée au phénomène d'oscillations rapides (méthode de moyennisation) qui est un analogue non-linéaire de la phase stationnaire.