Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
Autor: Colin de Verdière, Yves
Kapitel: 1. Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 23–51

UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE *)

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

RÉSUMÉ. Ce texte est une introduction à la mécanique semi-classique à l'usage des non-spécialistes.

Après avoir rappelé les contextes de la mécanique classique (géométrie symplectique) et de la mécanique quantique, on introduit la mécanique semi-classique à partir d'exemples simples: transformations de Fourier et de Legendre, principe de Huygens.

On décrit ensuite les formules de trace semi-classiques et la problématique du *chaos quantique*.

1. INTRODUCTION

Le but de ces exposés est de servir de motivation et d'introduction au sujet. Du point de vue de la physique, il s'agit de techniques qui remontent au début de la mécanique quantique: le *principe de correspondance* affirme de façon vague que *la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck $\hbar$ peut être considérée comme petite*, autrement dit que les actions S en jeu sont grandes devant $\hbar$. Bien sûr, dire qu'une théorie physique est une limite d'une autre théorie physique est un concept important puisqu'une grande partie du savoir faire du physicien est de prévoir ce qui est petit et ce qui est grand. La limite *quantique-classique* est plus complexe que la limite *relativiste-galiléen* qui se réduit essentiellement à des développements limités en $\frac{1}{c}$, où c est la vitesse de la lumière.

Depuis le début de la mécanique quantique, le passage à la limite semi-classique est traité par des règles plus ou moins empiriques: les développements BKW (Brillouin-Kramers-Wentzel) et les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld font ainsi partie de l'outillage de base du

*) Rédaction d'exposés donnés dans le cadre de rencontres Genève-Grenoble-Lyon (24 et 25 avril 1997)

physicien quantique. Ces méthodes ont leurs limitations intrinsèques : difficultés liées aux caustiques, impossibilité de dire quelque chose de précis sur les spectres dans les cas non complètement intégrables (i.e. génériques).

Du point de vue mathématique, les travaux de Maslov, Leray, Hörmander en équations aux dérivées partielles linéaires (analyse *micro-locale*), dans les années 65-70, ont donné une assise naturelle et solide aux calculs des physiciens. En particulier, ces méthodes permettent de décrire de façon précise le passage des caustiques et la nature des déphasages des fonctions d'ondes en ces points (indice de Maslov).

L'application de ces méthodes aux équations de Schrödinger et à la limite géométrique de l'optique ondulatoire a connu un grand développement depuis les années 70. Ces travaux s'appuient sur des résultats de plus en plus fins de mécanique classique des systèmes hamiltoniens (systèmes complètement intégrables, théorie KAM, flots d'Anosov) en même temps que sur des techniques d'analyse variées (intégrales oscillantes, estimations de type elliptique, développements asymptotiques, méthodes de resommation, passage dans le complexe). Un des problèmes clés est l'étude semi-classique des spectres d'opérateurs : asymptotique des grandes valeurs propres des laplaciens riemanniens, asymptotique du spectre d'un opérateur de Schrödinger lorsque $\hbar \to 0^+$.

Après avoir brièvement rappelé le formalisme hamiltonien et le formalisme quantique, je décrirai le problème de la limite semi-classique.

Je parlerai ensuite du spectre : depuis le cas complètement intégrable, en passant par KAM, j'en viendrai à ce que je considère comme l'un des plus jolis résultats de la théorie, la formule des traces dite de Gutzwiller dont je donnerai une preuve heuristique basée sur l'intégrale de Feynman.

Je parlerai enfin de l'analyse fine du spectre semi-classique et du lien avec la théorie des matrices aléatoires.

Je veux profiter de l'occasion pour introduire deux idées que je trouve stimulantes et que je vous soumets :

1) La mécanique classique est certes une limite de la mécanique quantique, mais la mécanique quantique est aussi un système hamiltonien classique particulier (linéaire) et la dimension infinie n'en est pas le fait le plus important.

2) La limite semi-classique est habituellement présentée comme liée au caractère linéaire de la mécanique quantique et dépendant essentiellement du principe de superposition (phase stationnaire) : elle est aussi liée au phénomène d'oscillations rapides (méthode de moyennisation) qui est un analogue non-linéaire de la phase stationnaire.