4.1 Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

4. La mécanique semi-classique

Pour cette section, voir [2], [25], [29], [32], [42], [44], [51].

4.1 Introduction

Du point de vue physique, la mécanique quantique est apparue comme nécessaire pour remplacer la mécanique classique dans certaines situations (atomes et molécules, physique des étoiles).

De même, l'optique géométrique doit être remplacée par une optique ondulatoire (Maxwell).

Le point commun est l'étude d'EDP linéaires dépendant d'un petit (ou grand) paramètre : équation de Schrödinger avec h petit, grandes valeurs propres du laplacien riemannien, solutions à grandes fréquences des équations de Maxwell.

On peut aussi considérer de façon plus générale la dégénérescence de systèmes hamiltoniens (en dimension finie ou infinie) dépendant d'un *petit* paramètre vers d'autres systèmes hamiltoniens de dimension plus petite. La méthode de moyennisation est un peu le prototype de ces limites : les oscillations rapides du système (penser à un gyroscope) donnent lieu à un découplage entre une dynamique rapide et une dynamique lente qui est à nouveau hamiltonienne sur un espace des phases réduit.

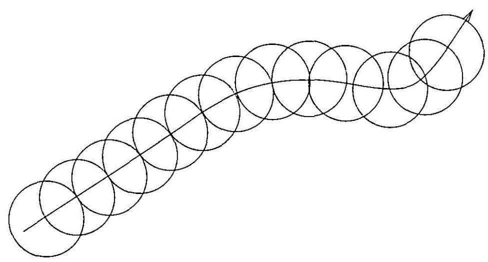

FIGURE 3
Méthode de moyennisation

Si on considère un hamiltonien

$$H_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}H_0 + H_1 \,,$$

sur une variété symplectique de dimension $2n$ et qu'on suppose que les trajectoires de H_0 contenues dans la couche d'énergie E_0 sont périodiques de période T_0, on peut introduire la variété symplectique Z_{E_0} de dimension

$2(n-1)$ des trajectoires de H_0 contenues dans la couche d'énergie E_0 et la munir de l'hamiltonien moyenné $K = \frac{1}{T_0}\int_\gamma H_1 dt$ décrivant une dynamique sur les trajectoires de H_0. Cette dynamique décrit bien le comportement des trajectoires de H_ε dans un intervalle de temps de l'ordre de 1.

4.2 La phase stationnaire

Voir [36].

Dans le cas qui nous préoccupe dans la suite (linéaire), ce découplage est une conséquence de la phase stationnaire : si on considère une intégrale oscillante du type :

$$I(h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x)|dx|\,,$$

où $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est C^∞ et $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, le comportement asymptotique de $I(h)$ quand h tend vers 0 est contrôlé par les points critiques de S situés dans le support de a. Lorsque ceux-ci sont non dégénérés, on a une formule explicite pour le développement asymptotique. Les faits remarquables sont les suivants : le comportement est en $h^{n/2}$, il y a une phase liée à l'indice de la hessienne de S aux points critiques.

Plus précisément, si S n'a qu'un point critique supposé non dégénéré x_0 dans le support de a de signature σ, on a :

$$I(h) \sim (2\pi h)^{n/2} e^{iS(x_0)/h} e^{i\sigma\pi/4} \frac{a(x_0)}{|\det(S''(x_0))|^{1/2}}\,.$$

Le coefficient principal (amplitude) admet une interprétation géométrique comme densité relative de 2 mesures en x_0 : la mesure $a(x)dx$ et la mesure associée canoniquement à S'' (comme en riemannien). Cette remarque est à l'origine de la géométrisation du calcul des intégrales oscillantes.

Donnons 3 applications semi-classiques simples de la phase stationnaire :

Exemple 4.1 (Fourier et Legendre).

Soit $S\colon U \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ et supposons que $x \to S'(x)$ est un difféomorphisme C^∞ de U sur un ouvert V du dual de $\mathbf{R}^n$. Soit alors $\widehat{S}(\xi)\colon V \to \mathbf{R}$ la transformée de Legendre de S caractérisée par

$$\{(x, S'(x)) \mid x \in U\} = \{(\widehat{S}'(\xi), \xi) \mid \xi \in V\}\,,$$

normalisée par $\widehat{S}(\xi_0) + S(x_0) = x_0\xi_0$ pour un point $\xi_0 = S'(x_0)$.