

6. Le cas général : la formule des traces semi-classiques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. LE CAS GÉNÉRAL : LA FORMULE DES TRACES SEMI-CLASSIQUES

Dans le cas non complètement intégrable, le calcul approché du spectre est impossible, comme cela a été remarqué par Einstein dans [26]. Dans les années 70 sont apparues de nouvelles méthodes que l'on désignera sous le nom de formules de traces semi-classiques. Il s'agit de formules asymptotiques pour la densité régularisée de valeurs propres. D'abord apparues chez des physiciens (Gutzwiller [30], Balaian et Bloch [5], [6]), ces formules ont été justifiées rigoureusement par les mathématiciens, d'abord dans ma thèse [12], utilisant une approximation de l'intégrale de Feynman, puis dans les travaux qui s'en sont inspirés, ceux de Chazarain [11] et de Duistermaat-Guillemin [23] en utilisant les OIF.

6.1 DENSITÉS RÉGULARISÉES

Pour obtenir des renseignements plus fins sur la fonction (discontinue) $N_h(E)$, il est agréable de la régulariser (au sens de Schwartz), on pose donc pour une fonction ρ lisse, d'intégrale 1 et à décroissance rapide :

$$N_\rho(E) = \sum_n \rho(E - E_n).$$

En fait, on utilise souvent une famille

$$\rho_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Lorsque ε tend vers 0, $N_{\rho_\varepsilon}(\mu)$ décrit une densité régularisée correspondant à un regroupement de paquets de valeurs propres de largeur $\sim \varepsilon$. Autrement dit on observe le spectre avec un grossissement $1/\varepsilon$.

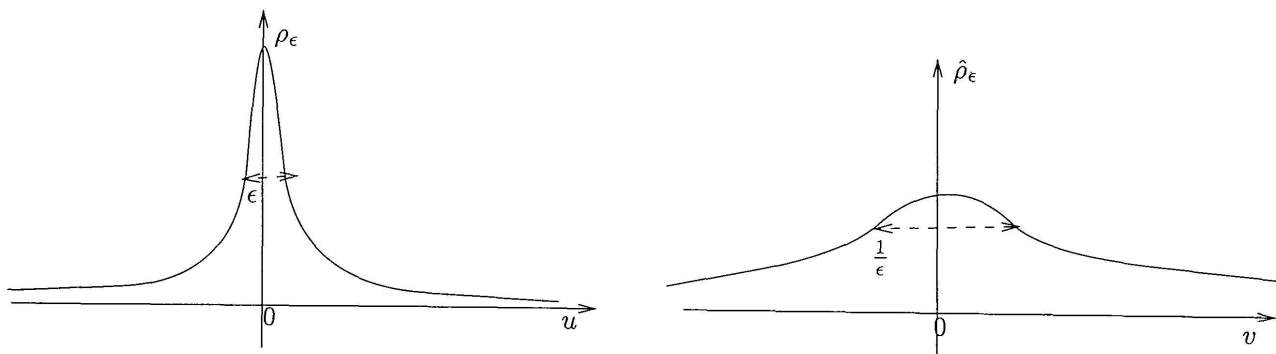


FIGURE 10

La densité spectrale régularisée

Le lien entre la densité régularisée et l'équation de Schrödinger est donné par la formule d'inversion de Fourier: si $\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu) d\mu$ et $Z(t) = \text{Trace}(e^{-itH/h})$, on a:

$$N_{\rho}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} Z(uh) e^{iu\mu} \widehat{\rho}(u) du.$$

Si on veut une analyse fine ρ doit être très localisée et cela implique que $\widehat{\rho}$ est très étalée et donc une connaissance de $Z(t)$ (et donc de $U(t)$) pour t grand. A la limite le spectre exact est lié aux solutions périodiques de l'équation de Schrödinger qui sont donc connues pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Deux échelles sont très importantes, $\varepsilon = h$ qui correspond du point de vue classique à un intervalle de temps borné et qui prend en compte un nombre de valeurs propres dans un intervalle de longueur $\sim h$ qui en compte environ h^{n-1} et l'échelle $\varepsilon = h^n$ qui correspond à la séparation des niveaux (Weyl) (et donc à une analyse fine du spectre analogue à celle donnée par Bohr-Sommerfeld) et à un temps de l'ordre de $1/h^{n-1}$.

La première échelle est une échelle *non universelle* donnée par les formules de traces semi-classique, alors que les échelles plus fines sont (au-delà du semi-classique) le domaine des *classes d'universalités* (GOE, GUE, Poisson) (voir section 7).

L'étude à ces échelles est difficile d'accès par les méthodes semi-classiques qui décrivent mal les asymptotiques simultanées $\hbar \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$; ce phénomène fondamental (et mystérieux) est appelé par certains auteurs *rupture de l'approximation semi-classique*.

La limite semi-classique se décrit bien en termes de l'évolution d'une fonction d'onde localisée de la forme:

$$\Phi_{x_0, p_0}(x) = ce^{-\frac{1}{2\hbar} \|x-x_0\|^2} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x},$$

appelé *état cohérent*. L'évolution semi-classique de Φ , $U(t)\Phi$, est donnée lorsque t reste borné par une fonction d'onde du même type localisée au point $\varphi_t(x_0, p_0)$ où φ_t est le flot classique. Lorsque t augmente, cette fonction gaussienne se délocalise en un temps lié à l'exposant de Liapounov λ :

$$T \sim \frac{1}{\lambda} |\ln \hbar|,$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une région initiale de diamètre \hbar ne soit plus localisée près de la trajectoire classique. Au delà de ce temps la non linéarité de la dynamique classique joue pleinement son rôle et $U(t)\Phi$ reste localisée sur la variété instable de (x_0, p_0) qui s'enroule de façon compliquée dans l'espace des phases Z .

6.2 LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG

Pour plus de détails sur cette section, voir par exemple l'excellent papier de Hejhal [33]. Le flot géodésique sur les surfaces de Riemann à courbure -1 n'est pas intégrable et on ne peut pas espérer non plus de formules explicites pour le spectre du laplacien. On devra se contenter de formules sommatoires qui généralisent la formule de Poisson.

Prenons l'hamiltonien quantique

$$\widehat{H} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$$

sur le tore de dimension 1, $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Son spectre est formé des nombres $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (séries de Fourier).

On a alors la formule suivante, pour $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \rho(\mu - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \widehat{\rho}(m) e^{im\mu},$$

où

$$\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu) d\mu$$

est la transformée de Fourier de ρ (qui est bien une fonction du temps...). C'est la classique formule sommatoire de Poisson.

On s'intéresse donc à la densité régularisée

$$N_{\rho}(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n),$$

où les valeurs propres du laplacien sont $\lambda_n = \frac{1}{4} + \mu_n^2$.

Motivé par l'analogie avec la fonction ζ de Riemann, A. Selberg a montré en 1956 que, pour des fonctions ρ convenables, $N_{\rho}(\mu)$ admet une expression exacte comme somme d'un terme régulier non oscillant $N_{TF}(\mu)$ dont la partie principale est donnée par Weyl :

$$N_{TF}(\mu) \sim \frac{\text{Aire}(X)}{2\pi} \mu$$

et de termes oscillants $N_{\gamma}(\mu)$ associés aux géodésiques périodiques.

L'expression de N_{γ} est :

$$N_{\gamma}(\mu) = \widehat{\rho}(L_{\gamma}) c(\gamma) e^{i\mu L_{\gamma}},$$

où L_{γ} est la longueur de la géodésique périodique γ et $c(\gamma)$ est un nombre complexe non nul calculable en termes de la dynamique linéarisée près de γ (application de Poincaré linéarisée, indice de Morse).

6.3 LA FORMULE DES TRACES SEMI-CLASSIQUES

Cette formule s'étend en une formule asymptotique (appelée formule de traces de Gutzwiller dans la littérature) valable en toute généralité (en particulier sans aucune hypothèse de type chaos classique, le cas complètement intégrable étant une conséquence de la formule sommatoire de Poisson) à condition de prendre ρ telle que $\hat{\rho}$ soit à support compact, ce qui revient à ne considérer la dynamique de l'équation de Schrödinger que sur un intervalle borné en temps et donc une contribution d'un nombre fini de géodésiques périodiques, en vertu de la formule d'inversion de Fourier :

$$\frac{1}{h}\rho\left(\frac{E - \hat{H}}{h}\right) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbf{R}} e^{itE/h} e^{-itH/h} \hat{\rho}(t) dt.$$

Donnons un énoncé assez précis pour l'équation de Schrödinger.

THÉORÈME 1. *Soit E une énergie non critique pour l'hamiltonien classique H , $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ égale à 1 près de E et $\rho(E)$ une fonction dont la transformée de Fourier est à support dans $|t| < T$.*

On suppose que les trajectoires périodiques γ de \mathcal{X}_H contenues dans $\{H = E\}$ sont non dégénérées au sens que l'application de Poincaré linéaire P_γ n'admet pas 1 comme valeur propre. Soit $T'_\gamma > 0$ la plus petite période de γ et m_γ l'indice de Morse de γ comme courbe fermée et $\epsilon_\gamma = 0$ ou 1.

Alors :

$$(6.1) \quad \sum_j \chi(E_j) \frac{1}{h} \rho\left(\frac{E - E_j}{h}\right) = N_W(E) + \sum_\gamma N_\gamma(E),$$

où

$$(6.2) \quad N_W(E) = C(E)h^{-(n-1)}(1 + O(h))$$

et

$$(6.3) \quad N_\gamma(E) = \frac{1}{2\pi h} \frac{T'_\gamma}{(\det(1 - P_\gamma))^{1/2}} e^{\frac{i}{h} \int_\gamma \xi dx - i(m_\gamma + \epsilon)\frac{\pi}{2}} (1 + O(h)).$$

La justification heuristique la plus simple est liée à l'intégrale de Feynman ; donnons-la : le propagateur quantique

$$p(t, x, y)$$

noyau intégral de l'opérateur $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ est donné selon Feynman ([27]) comme une superposition d'amplitudes associées aux différents

chemins $\gamma \in \Omega_{x,y,t}$ qui est l'ensemble de chemins $(\gamma: [0, t] \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = x, \gamma(t) = y)$:

$$p(t, x, y) = \int_{\Omega_{x,y,t}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds} |d\gamma|,$$

où $\mathcal{L}: TX \rightarrow \mathbf{R}$ est le lagrangien classique. Dans le cas des géodésiques, le lagrangien est l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \|\gamma'\|^2$.

Si Ω_t désigne maintenant l'espace des lacets fermés parcouru en le temps t , on obtient la fonction de partition quantique :

$$Z(t) = \sum e^{-itE_j/\hbar} = \int_X p(t, x, x) dx = \int_{\Omega_t} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds} |d\gamma|,$$

comme une intégrale sur les *lacets*. L'application de la phase stationnaire, lorsque \hbar tend vers 0, fait apparaître les trajectoires fermées comme points critiques de $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds$ sur Ω_t .

Dans le cas de Selberg, il se trouve que, bien que la surface X puisse être compliquée, l'espace Ω_t se décompose en composantes connexes simples, une par géodésique périodique et que la décomposition de $Z(t)$ en somme d'intégrales sur ces composantes connexes permet de prévoir une formule sommatoire exacte.

La formule de traces semi-classiques donne certes des informations sur le spectre, mais elle a surtout une application aux problèmes inverses. Par exemple dans le cas riemannien, elle montre que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs des géodésiques périodiques.

La fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1,$$

s'étend en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} ayant des zéros aux entiers pairs < 0 . Riemann a fait l'hypothèse selon laquelle les autres zéros satisfont $\Re(s) = 1/2$. Cette hypothèse centrale en théorie des nombres est restée improuvée depuis environ 150 ans.

Il existe des formules sommatoires ayant une analogie formelle avec celle de Selberg pour ces zéros. A. Connes [22] vient de proposer un hamiltonien quantique dont le spectre serait donné par ces zéros et ainsi une voie d'attaque de l'hypothèse de Riemann.