

# 6.1 Densités régularisées

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 6. LE CAS GÉNÉRAL : LA FORMULE DES TRACES SEMI-CLASSIQUES

Dans le cas non complètement intégrable, le calcul approché du spectre est impossible, comme cela a été remarqué par Einstein dans [26]. Dans les années 70 sont apparues de nouvelles méthodes que l'on désignera sous le nom de formules de traces semi-classiques. Il s'agit de formules asymptotiques pour la densité régularisée de valeurs propres. D'abord apparues chez des physiciens (Gutzwiller [30], Balaian et Bloch [5], [6]), ces formules ont été justifiées rigoureusement par les mathématiciens, d'abord dans ma thèse [12], utilisant une approximation de l'intégrale de Feynman, puis dans les travaux qui s'en sont inspirés, ceux de Chazarain [11] et de Duistermaat-Guillemin [23] en utilisant les OIF.

## 6.1 DENSITÉS RÉGULARISÉES

Pour obtenir des renseignements plus fins sur la fonction (discontinue)  $N_h(E)$ , il est agréable de la régulariser (au sens de Schwartz), on pose donc pour une fonction  $\rho$  lisse, d'intégrale 1 et à décroissance rapide :

$$N_\rho(E) = \sum_n \rho(E - E_n).$$

En fait, on utilise souvent une famille

$$\rho_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $N_{\rho_\varepsilon}(\mu)$  décrit une densité régularisée correspondant à un regroupement de paquets de valeurs propres de largeur  $\sim \varepsilon$ . Autrement dit on observe le spectre avec un grossissement  $1/\varepsilon$ .

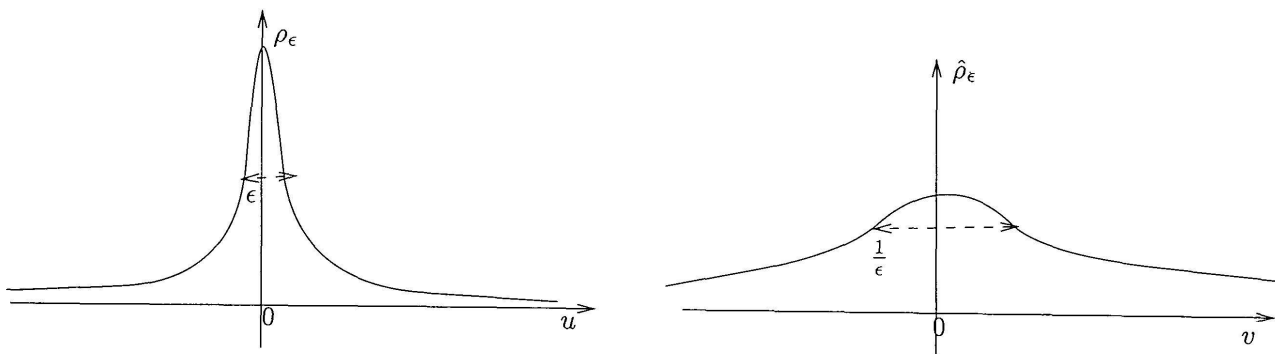


FIGURE 10

La densité spectrale régularisée

Le lien entre la densité régularisée et l'équation de Schrödinger est donné par la formule d'inversion de Fourier: si  $\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu) d\mu$  et  $Z(t) = \text{Trace}(e^{-itH/h})$ , on a:

$$N_{\rho}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} Z(uh) e^{iu\mu} \widehat{\rho}(u) du.$$

Si on veut une analyse fine  $\rho$  doit être très localisée et cela implique que  $\widehat{\rho}$  est très étalée et donc une connaissance de  $Z(t)$  (et donc de  $U(t)$ ) pour  $t$  grand. A la limite le spectre exact est lié aux solutions périodiques de l'équation de Schrödinger qui sont donc connues pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

Deux échelles sont très importantes,  $\varepsilon = h$  qui correspond du point de vue classique à un intervalle de temps borné et qui prend en compte un nombre de valeurs propres dans un intervalle de longueur  $\sim h$  qui en compte environ  $h^{n-1}$  et l'échelle  $\varepsilon = h^n$  qui correspond à la séparation des niveaux (Weyl) (et donc à une analyse fine du spectre analogue à celle donnée par Bohr-Sommerfeld) et à un temps de l'ordre de  $1/h^{n-1}$ .

La première échelle est une échelle *non universelle* donnée par les formules de traces semi-classique, alors que les échelles plus fines sont (au-delà du semi-classique) le domaine des *classes d'universalités* (GOE, GUE, Poisson) (voir section 7).

L'étude à ces échelles est difficile d'accès par les méthodes semi-classiques qui décrivent mal les asymptotiques simultanées  $\hbar \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow \infty$ ; ce phénomène fondamental (et mystérieux) est appelé par certains auteurs *rupture de l'approximation semi-classique*.

La limite semi-classique se décrit bien en termes de l'évolution d'une fonction d'onde localisée de la forme:

$$\Phi_{x_0, p_0}(x) = ce^{-\frac{1}{2\hbar} \|x-x_0\|^2} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x},$$

appelé *état cohérent*. L'évolution semi-classique de  $\Phi$ ,  $U(t)\Phi$ , est donnée lorsque  $t$  reste borné par une fonction d'onde du même type localisée au point  $\varphi_t(x_0, p_0)$  où  $\varphi_t$  est le flot classique. Lorsque  $t$  augmente, cette fonction gaussienne se délocalise en un temps lié à l'exposant de Liapounov  $\lambda$ :

$$T \sim \frac{1}{\lambda} |\ln \hbar|,$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une région initiale de diamètre  $\hbar$  ne soit plus localisée près de la trajectoire classique. Au delà de ce temps la non linéarité de la dynamique classique joue pleinement son rôle et  $U(t)\Phi$  reste localisée sur la variété instable de  $(x_0, p_0)$  qui s'enroule de façon compliquée dans l'espace des phases  $Z$ .