

7. Statistiques spectrales

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

7. STATISTIQUES SPECTRALES

Pour ceci, voir [9], [25], [41], [45], [46].

Il s'agit d'exprimer des propriétés de nature statistique d'une suite (infinie) de nombres.

Soit $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_N < \dots$ une suite infinie de nombres réels vérifiant la condition asymptotique suivante :

$$(\star) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_N}{N} = 1.$$

On peut alors introduire plusieurs invariants statistiques, les plus simples étant :

- la distribution du plus proche voisin $p(s)$,
- l'écart quadratique par rapport à loi uniforme sur un intervalle de test de longueur l , $\Sigma^2(l)$ qui mesure la rigidité du spectre.

Par exemple, on peut poser (en supposant que ces limites existent) :

$$p(s) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq N \mid s \leq E_{p+1} - E_p \leq s + ds\}}{N}.$$

Et de même :

$$\Sigma^2(l) = \lim_{E \rightarrow \infty} (\#\{p \mid E \leq E_p \leq E + l\} - l)^2.$$

$p(s)$ mesure donc la statistique des écarts de niveaux, alors que $\Sigma^2(l)$ mesure la rigidité : $\Sigma^2(l)$ petit signifie que la suite est presque une suite arithmétique.

Si on a un vrai spectre, la condition (\star) n'est pas satisfaite en général, mais les asymptotiques de type Weyl permettent un reparamétrage du spectre par une fonction puissance

$$E'_N = cE_N^\alpha$$

de façon à ce que (\star) soit satisfaite.

Des exemples : la distribution de Poisson consiste à prendre N points répartis de façon équiprobable dans un intervalle de longueur N et la limite quand N tend vers l'infini. Il est bien connu qu'on a alors :

$$p(s) = e^{-s}.$$

De même, on montre que

$$\Sigma^2(l) = l.$$

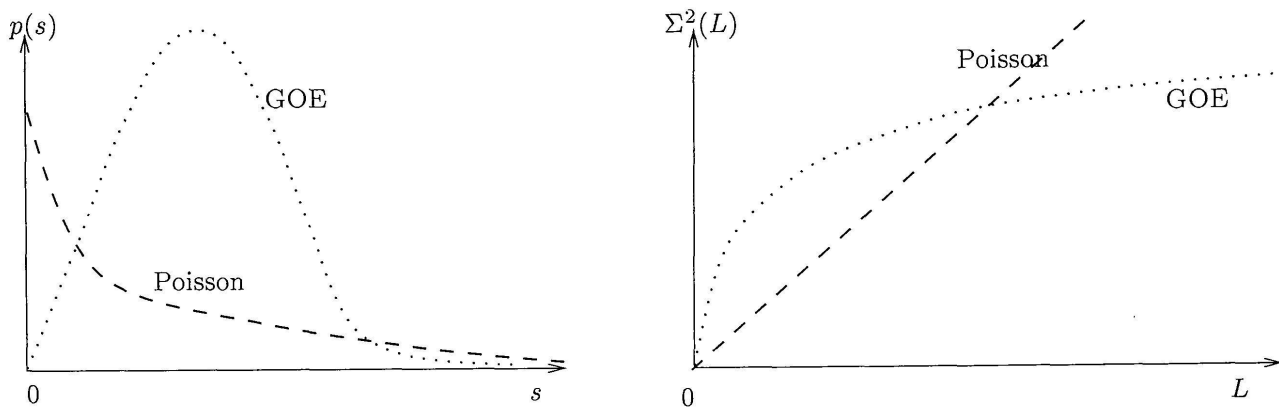


FIGURE 11

Les statistiques spectrales: Poisson et GOE

Les spectres génériques ne sont pas poissonniens, ne serait-ce qu'à cause de la répulsion des niveaux. Il est connu depuis Wigner et von Neumann (~ 1930) que la condition $\lambda_p = \lambda_{p+1}$ définit un sous-ensemble de codimension 2 de l'espace des opérateurs symétriques. On s'attend donc à: $p(0) = 0$ pour un hamiltonien quantique générique. Cette répulsion de niveaux n'est pas satisfaite dans les cas complètement intégrables; par exemple le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ a toutes ses valeurs propres dégénérées! Mais le cas complètement intégrable est *atypique* comme on le sait depuis Poincaré.

GOE: Décrivons brièvement la théorie GOE. On considère des ensembles (au sens de la thermodynamique) de matrices symétriques $N \times N$ dont les éléments $a_{i,j}$, $i \leq j$ sont des variables aléatoires normales indépendantes de même loi. On s'intéresse alors aux statistiques spectrales lorsque $N \rightarrow \infty$. On montre que le spectre se répartit dans un intervalle $(-c\sqrt{N}, c\sqrt{N})$ avec donc un écart moyen $2c/\sqrt{N}$. On renormalise en considérant $\lambda'_n = \frac{\sqrt{n}}{2c} \lambda_n$ et on peut alors calculer les limites thermodynamiques des statistiques spectrales. Le livre de Mehta [41] en donne un exposé détaillé.

$p(s)$ est proche d'une courbe $ase^{-s^2/b}$ suggérée par Wigner.

$$\Sigma^2(l) = \frac{2}{\pi^2} \ln l + o(1), \quad l \rightarrow \infty.$$

GUE: De même si on s'intéresse aux matrices hermitiennes on obtient les statistiques GUE.

Des expériences numériques:

On s'attend donc, et cela a été explicitement proposé par des physiciens d'Orsay ([9]) dès 1984, à ce qu'à un flot géodésique chaotique corresponde une statistique de type GOE pour le spectre.

Les résultats numériques sont curieux : cela marche pour le stade ou le billard de Sinai (tore de dimension 2 privé d'un disque), mais les expériences menées sur certains triangles géodésiques du disque de Poincaré dont la dynamique classique a les mêmes propriétés que celles décrites plus haut semblent montrer une dichotomie entre les triangles qui permettent de paver H , par exemple les angles $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$ et plus généralement l'infinité de possibilités

$$\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

pour lesquels GOE ne marche pas et ceux qui ne pavent pas, par exemple $(\pi/2, \pi/3, 2\pi/15)$, pour lesquels GOE était vérifiée.

Cette dichotomie n'était pas la bonne comme l'ont vu il y a quelques années E. Bogomolny, B. Georgeot et M.-J. Giannoni.

Il se trouve que, parmi les triangles (une infinité) qui pavent H , un certain nombre fini dont la liste est connue correspondent à des sous-groupes dits *arithmétiques* de $SL_2(\mathbf{R})$ et que ce sont ceux-là pour lesquels GOE n'est pas satisfaite. Je ne vais pas me lancer dans une définition précise des groupes arithmétiques, mais disons que l'arithméticité a comme conséquence une grande dégénérescence du spectre des longueurs des géodésiques périodiques. Cette dégénérescence est elle même reliée à une famille de symétries quantiques particulières, appelées correspondances de Hecke. Ces symétries supplémentaires, relativement cachées, font que ces hamiltoniens quantiques ne sont pas génériques ! Luo et Sarnak ([45]) ont démontré que GOE n'est effectivement pas satisfaite dans les cas arithmétiques.

Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, H/Γ est l'espace des réseaux de \mathbf{R}^2 euclidien et si on définit, pour tout réseau z , $Y_n(z)$ comme l'ensemble des sous-réseaux d'indice n de z , les opérateurs $T_n\varphi(z) = \sum_{z' \in Y_n(z)} \varphi(z')$ commutent entre eux et avec Δ : ce sont les opérateurs de Hecke !

Les statistiques GUE sont utilisées lorsqu'il n'y a pas symétrie par inversion du temps (champs magnétiques). Montgomery a remarqué en 1973 que ces statistiques s'appliquent parfaitement aux zéros de la fonction ζ de Riemann, ce qui est cohérent avec l'approche proposée par Connes dans [22], voir aussi [37], [38].