

DIOPHANTINE EQUATION INVOLVING FIFTH POWERS

Autor(en): **Choudhry, Ajai**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-63895>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

A DIOPHANTINE EQUATION INVOLVING FIFTH POWERS

by Ajai CHOUDHRY

ABSTRACT. The paper provides a parametric solution of the diophantine equation $aX_1^5 + bX_2^5 + cX_3^5 + dX_4^5 = aY_1^5 + bY_2^5 + cY_3^5 + dY_4^5$, where a, b, c, d are arbitrary non-zero integers.

While several parametric solutions of the diophantine equation

$$X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 = Y_1^5 + Y_2^5 + Y_3^5 + Y_4^5$$

are known [1,2,3], the diophantine equation

$$(1) \quad aX_1^5 + bX_2^5 + cX_3^5 + dX_4^5 = aY_1^5 + bY_2^5 + cY_3^5 + dY_4^5$$

has not been considered earlier. In this paper we give a parametric solution of (1) when a, b, c, d are arbitrary non-zero integers.

To solve (1), we write

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = m_1 p_1 u + m_2 v \alpha, & X_2 = m_1 q_1 u + m_2 v \beta, \\ X_3 = n_1 p_2 u + n_2 v \alpha, & X_4 = n_1 q_2 u + n_2 v \beta, \\ Y_1 = m_1 r_1 u + m_2 v \alpha, & Y_2 = m_2 v \beta, \\ Y_3 = n_1 r_2 u + n_2 v \alpha, & Y_4 = n_2 v \beta, \end{cases}$$

where $m_1, n_1, p_1, q_1, r_1, m_2, n_2, p_2, q_2, r_2, u, v, \alpha, \beta$ are arbitrary. Substituting these values in (1), we get an equation which may be written as

$$(3) \quad \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} u^i v^{5-i} \left[m_1^i m_2^{5-i} \{ a(p_1^i - r_1^i) \alpha^{5-i} + b q_1^i \beta^{5-i} \} \right. \\ \left. + n_1^i n_2^{5-i} \{ c(p_2^i - r_2^i) \alpha^{5-i} + d q_2^i \beta^{5-i} \} \right] = 0.$$

We now choose $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ as follows :

$$(4) \quad \begin{cases} p_1 = a\alpha^5 - b\beta^5, & q_1 = 2a\alpha^4\beta, & r_1 = a\alpha^5 + b\beta^5, \\ p_2 = -c\alpha^5 + d\beta^5, & q_2 = -2c\alpha^4\beta, & r_2 = -c\alpha^5 - d\beta^5. \end{cases}$$

With these values of $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ (and m_1, n_1, m_2, n_2 arbitrary), we find that the coefficients of uv^4 and u^2v^3 in equation (3) become zero. The coefficient of u^3v^2 in (3) will also vanish if

$$(5) \quad abm_1^3m_2^2(a^2\alpha^{10} - b^2\beta^{10}) - cdn_1^3n_2^2(c^2\alpha^{10} - d^2\beta^{10}) = 0.$$

We accordingly choose

$$(6) \quad \begin{cases} m_1 = n_2, & n_1 = m_2, \\ m_2 = ab(a^2\alpha^{10} - b^2\beta^{10}), & n_2 = cd(c^2\alpha^{10} - d^2\beta^{10}), \end{cases}$$

so that (5) is satisfied. Now, equation (3) has only the terms involving u^4v and u^5 and it is readily solved to give the following solution for u, v :

$$(7) \quad \begin{cases} u = -20a^2b\alpha^6m_1^4m_2(a^2\alpha^{10} - b^2\beta^{10}) \\ \quad \quad \quad - 20c^2d\alpha^6n_1^4n_2(c^2\alpha^{10} - d^2\beta^{10}), \\ v = abm_1^5(11a^4\alpha^{20} - 10a^2b^2\alpha^{10}\beta^{10} - b^4\beta^{20}) \\ \quad \quad \quad - cdn_1^5(11c^4\alpha^{20} - 10c^2d^2\alpha^{10}\beta^{10} - d^4\beta^{20}). \end{cases}$$

Thus, a parametric solution of equation (1) in terms of the parameters α and β is given by (2), where m_1, n_1, m_2, n_2 are defined by (6), $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ by (4), and u, v by (7).

As a numerical example, when $a = 1, b = 2, c = 3, d = 6$, taking $\alpha = 1, \beta = 2$, we get the following solution of (1):

$$\begin{aligned} (X_1, X_2, X_3, X_4) &= (1955587, 2963474, 121184667, 242404434), \\ (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= (1022467, 2992634, 121219227, 242403354). \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] CHOUDHRY, A. The diophantine system $\sum_{i=1}^4 x_i^r = \sum_{i=1}^4 y_i^r, r = 1, 3, 5$. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 83 (1991), 85–86.
- [2] LANDER, L. J. Geometric aspects of diophantine equations involving equal sums of like powers. *Amer. Math. Monthly* 75 (1968), 1061–1073.

- [3] LANDER, L. J., T. R. PARKIN and J. L. SELFRIDGE. A survey of equal sums of like powers. *Math. Comp.* 21 (1967), 446–459.

(Reçu le 5 décembre 1997)

Ajai Choudhry

Embassy of India
Kantari Street, Sahmarani Building
P.O. Box No. 113-5240
Beirut
Lebanon
e-mail: indembei@dm.net.lb

Vide-leer-empty