

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

By (10), (11) and Lemma 1,

$$(12) \quad q \mid m^{(m, q-1)} - 1.$$

Suppose now that (8) does not hold. Then  $(m, q-1) \mid \frac{m}{p_i}$  for some  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , whence by (12),

$$(13) \quad q \mid m^{m/p_i} - 1$$

and therefore

$$(14) \quad \frac{m^m - 1}{m^{m/p_i} - 1} = \sum_{\nu=0}^{p_i-1} (m^{m/p_i})^\nu \equiv p_i \pmod{q}.$$

But (14) is impossible, for with (9) it implies that  $p_i = q$ , contradicting the fact that  $q$  does not divide  $m$ . This concludes the proof of the theorem.

REMARK. Several elementary proofs of this special case of Dirichlet's theorem are known; see [1], [2, §11.3], [4, §48], [5], [6], [7, §6.1A], [8, Ch. 6,5], [9], [10] and the references in [7, pp.241–245]. They involve, more or less explicitly, the cyclotomic polynomials, say  $\Phi_n(x)$ . Although the proof we have given here does not require any knowledge of these polynomials, the integer  $N$  defined in (7) is in fact equal to  $\Phi_m(m)$ , as can be seen with Lemmas 1 and 2 and the identity [2, p.181]

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^{n/d} - 1)^{\mu(d)},$$

where  $\mu$  is the Möbius function (see also [4], §46).

#### REFERENCES

- [1] ESTERMANN, T. Note on a paper of A. Rotkiewicz. *Acta Arithmetica* 8 (1963), 465–467.
- [2] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag (Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York), 1964.
- [3] LE BESGUE, V.-A. *Introduction à la théorie des nombres*. Mallet-Bachelier (Paris), 1862.
- [4] NAGELL, T. *Introduction to Number Theory*. 2<sup>nd</sup> edition. Chelsea Publishing Co. (New York), 1964.
- [5] NIVEN, I. and B. POWELL. Primes in certain arithmetic progressions. *Amer. Math. Monthly* 83 (1976), 467–469.

- [6] ROTKIEWICZ, A. Démonstration arithmétique de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme  $nk+1$ . *L'Enseignement Math.* (2) 7 (1961), 277–280.
- [7] SHAPIRO, H.N. *Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, Inc. (New York), 1983.
- [8] SIERPIŃSKI, W. *Elementary Theory of Numbers*. 2<sup>nd</sup> edition (ed. A. Schinzel). North-Holland (Amsterdam, New York, Oxford) and PWN (Warszawa), 1988.
- [9] SCHUR, I. Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen. *Sitzber. der Berliner Math. Ges.* 11 (1912), 40–50. Reproduced in *Gesammelte Abhandlungen II* (ed. A. Brauer and H. Rohrbach), 1–11. Springer-Verlag (Berlin, Göttingen, New York), 1973.
- [10] WENDT, E. Elementarer Beweis des Satzes, dass in jeder unbegrenzten arithmetischen Progression  $my + 1$  unendlich viele Primzahlen vorkommen. *J. für die reine und angewandte Math.* 115 (1895), 85–88.

*(Reçu le 30 juin 1997; version révisée reçue le 30 avril 1998)*

Nairi Sedrakian

c/o Vardan Akopian  
8, rue Francis de Croisset, A406  
F-75018 Paris  
France  
*e-mail*: hakobian@ann.jussieu.fr

John Steinig

Section de mathématiques  
Université de Genève  
C.P. 240  
CH-1211 Genève 24  
Switzerland

**Vide-leer-empty**