

2. The convolution algebra $D(G; \lambda_1)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

for $f \in C_c(G)$. We adopt the usual notation $C_c(G)$ for the space of continuous functions on G with compact support. In the above formulas, $dn = dw dz$ ($n = n(w, z)$) and dk is the normalized Haar measure on K .

Let

$$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} : u \in \text{Sp}(1) \right\}, \quad K_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} : U \in \text{Sp}(n) \right\}.$$

Then every $g \in G$ can be written as $g = k_1 k_2 a_t k'_2$ for uniquely determined $k_1 \in K_1$, $t \geq 0$ and for some $k_2, k'_2 \in K_2$. Writing $g = [g_{ij}]_{i,j=0}^n$, we have

$$(1.5) \quad k_1 = \frac{g_{00}}{|g_{00}|} \quad \text{and} \quad \cosh t = |g_{00}|.$$

If $g \notin K$, then $t > 0$ and k_2, k'_2 are uniquely determined modulo the subgroup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : V \in \text{Sp}(n-1) \right\}.$$

After dg is normalized according to (1.3), the corresponding integral formula is

$$(1.6) \quad \int_G f(g) dg = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(2n)} \int_{K_1} \int_{K_2} \int_0^\infty \int_{K_2} f(k_1 k_2 a_t k'_2) \Delta(t) dk_1 dk_2 dt dk'_2$$

where

$$(1.7) \quad \Delta(t) := 2^{2\rho} (\sinh t)^{4n-1} (\cosh t)^3.$$

2. THE CONVOLUTION ALGEBRA $\mathcal{D}(G; \chi_l)$

Let $\mathbf{N}/2$ be the set of nonnegative half-integers $\{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$. Since $K_1 \cong \text{Sp}(1)$ is isomorphic to $\text{SU}(2)$, $\mathbf{N}/2$ parametrizes the set of equivalence classes of unitary irreducible representations of K_1 . We denote with the same symbol τ_l either the equivalence class corresponding to the parameter l or a fixed representative for it. Thus τ_l is a unitary irreducible representation of K_1 in a Hilbert space V_l of dimension $d_l = 2l + 1$. We extend τ_l to a representation of K by setting $\tau_l \equiv \mathbf{1}$ on K_2 . Each τ_l is self-dual, i.e. unitarily equivalent to its contragredient representation. It follows in particular that the character $\chi_l = \text{tr } \tau_l$ of τ_l satisfies $\chi_l(k^{-1}) = \chi_l(k)$, $k \in K$.

We denote by $\mathcal{D}(G; \tau_l)$ the convolution algebra of the compactly supported C^∞ maps $F: G \rightarrow \text{End}(V_l)$ satisfying

$$(2.8) \quad F(kxk') = \tau_l(k)F(x)\tau_l(k') \quad (k, k' \in K, x \in G).$$

Let $\mathcal{D}(G)$ be the convolution algebra of the C^∞ compactly supported complex valued functions on G . Then $\mathcal{D}(G; \tau_l)$ is isomorphic to the subalgebra $\mathcal{D}(G; \chi_l)$ of $\mathcal{D}(G)$ consisting of the functions $f \in \mathcal{D}(G)$ satisfying

$$(2.9) \quad f^0 = f$$

and

$$(2.10) \quad f * d_l \chi_l = f,$$

where

$$(2.11) \quad f^0(x) := \int_K f(kxk^{-1}) dk.$$

The isomorphism is given by $F \mapsto d_l \operatorname{tr} F$ (see e.g. [Dij], Theorem 1.1).

The commutativity of the algebra $\mathcal{D}(G; \chi_l)$ can be deduced from the fact that the restriction $\tau_l|_M$ of τ_l to M is multiplicity free (according to the general criterion by Deitmar, cf. [Dei] Theorem 3, the commutativity of $\mathcal{D}(G; \chi_l)$ and the multiplicity freeness of $\tau_l|_M$ are in fact equivalent). An elementary direct argument by Takahashi proves the commutativity of a convolution algebra which is slightly bigger than $\mathcal{D}(G; \chi_l)$. Let $\mathcal{D}_1(G)$ be the subalgebra of $\mathcal{D}(G)$ consisting of the functions $f \in \mathcal{D}(G)$ satisfying

$$(2.12) \quad f(k_2 k_1 g k_1^{-1} k_2') = f(g), \quad g \in G, k_1 \in K_1, k_2 \in K_2.$$

Clearly $\mathcal{D}(G; \chi_l) \subset \mathcal{D}_1(G)$. Moreover $\mathcal{D}_1(G) = \oplus_l \mathcal{D}(G; \chi_l)$. Showing that

$$(2.13) \quad f(g^{-1}) = f(g) \quad \text{for all } f \in \mathcal{D}_1(G) \text{ and } g \in G,$$

one proves the following lemma.

2.1. LEMMA ([T2], Proposition 1). *The algebra $\mathcal{D}_1(G)$ is commutative.*

2.2. LEMMA (cf. [T2], Lemma 2). *For every function $f \in \mathcal{D}(G; \chi_l)$,*

$$(2.14) \quad f(g) = f(k_1 a_t) = \frac{1}{d_l} \chi_l(k_1) f(a_t)$$

if $g = k_1 k_2 a_t k_2'$ ($k_1 \in K_1; k_2, k_2' \in K_2; t \in \mathbf{R}$).

Proof. For $F \in \mathcal{D}(G; \tau_l)$, $F(a_t)$ is a scalar multiple of the identity, since it commutes with $\tau_l(k_1)$ for all $k_1 \in K_1$. \square

2.3. REMARK. Formula (2.13) and Lemma 2.2 remain true for all continuous functions f such that $f = f^0$, $f * d_l \chi_l = f$.