3. La méthode de l'hyperbole revisitée

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

PROPOSITION 4. *Avec les notations du paragraphe 1, on a:*

$$dN = e^{d\Pi},$$

où $\Pi(x) := P(x) + \frac{1}{2}P(x^{1/2}) + \frac{1}{3}P(x^{1/3}) + \dots$

Cette proposition traduit l'identité eulérienne formelle:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^s} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_n^s}} = \exp \sum_{n\geq 1,\, k\geq 1} \frac{1}{k\beta_n^{ks}}.$$

Ainsi, la théorie de Beurling ressortit à l'étude de l'exponentielle et du logarithme dans l'algèbre de mesures $\mathcal{M}$.

FORMULAIRE

Nous donnons ci-dessous une liste de propriétés d'usage constant pour le calcul dans $\mathcal{M}$.

1. La multiplication par t^r est pour tout nombre complexe r un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}$. En particulier, pour toute série entière $f(z)$, on a
$$t^r f(d\alpha) = f(t^r d\alpha).$$
2. $d\alpha * \frac{dt}{t} = \alpha(t)\frac{dt}{t}$.
3. $(dt)^{*n} = \dfrac{(\log t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$.
4. $(\delta + dt) * (\delta - \dfrac{dt}{t}) = \delta$.
5. $\delta + dt = e^{d\tau}$, où
$$\tau(x) := \int_1^x \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{\log t}.$$

3. LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE REVISITÉE

Si $d\alpha * d\beta = d\gamma$, on a

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \int_{1\leq st\leq x} d\alpha(s)d\beta(t) = \int_1^x \beta\Big(\frac{x}{s}\Big)d\alpha(s) = \int_1^x \alpha\Big(\frac{x}{t}\Big)d\beta(t)\\ &= \int_1^y \beta\Big(\frac{x}{s}\Big)d\alpha(s) + \int_1^{x/y} \alpha\Big(\frac{x}{t}\Big)d\beta(t) - \alpha(y)\beta\Big(\frac{x}{y}\Big)\end{aligned}$$

pour tout x et tout y tels que $1 \leq y \leq x$.

Cette façon de calculer un produit de convolution en introduisant un paramètre y, déterminé ensuite au mieux suivant la question considérée, a été imaginée par Dirichlet dans [9]. C'est la méthode de l'hyperbole. L'idée de Diamond est que l'itération de ce principe de calcul permet d'étudier des mesures définies dans $\mathcal{M}$ au moyen de séries entières comme au paragraphe précédent, par exemple des exponentielles d'autres mesures.

On a immédiatement l'estimation suivante :

LEMME 1. *Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, on a, pour $d\gamma = d\alpha * d\beta$ et $x = yz$, où $y \geq 1$, $z \geq 1$:*

$$|\gamma(x)| \leq \|d\alpha\|_y \sup_{[z,x]} |\beta| + \|d\beta\|_z \sup_{[y,x]} |\alpha| + |\alpha(y)\beta(z)| .$$

Le lemme suivant donne l'inégalité fondamentale dans la méthode de Diamond :

LEMME 2. *Soit $d\alpha$ une mesure. Posons pour tout entier $n \geq 1$,*

$$d\alpha_n := (d\alpha)^{*n} ,$$

et supposons que :

1) $\|d\alpha\|_x \leq A(x)$;

2) $|\alpha(x)| \leq B(x)C(\log x) \leq M$,

où A et B sont croissantes au sens large et C décroissante au sens large, et M est un nombre réel positif.

Alors, pour $n \geq 1$, n entier, et $x \geq 1$, x réel, on a :

$$|\alpha_n(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x)\, C\Big(\frac{\log x}{n}\Big) .$$

Démonstration. Observons pour commencer que l'hypothèse 1) entraîne :

$$\|d\alpha_n\|_z \leq A(x)^n ,$$

pour $n \geq 1$, $1 \leq z \leq x$.

On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est contenu dans l'hypothèse 2). Le passage de n à $n+1$ se fait en appliquant le lemme 1 avec $y = x^{\frac{1}{n+1}}$, $z = x^{\frac{n}{n+1}}$, et $\beta = \alpha_n$. On a :

$$|\alpha_{n+1}(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) A(x) \\ + B(x)C(\log y)A(x)^n + Mn(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) .$$

Or $\log y = \dfrac{\log z}{n} = \dfrac{\log x}{n+1}$ donc

$$|\alpha_{n+1}(x)| \le B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big)\left[nA(x)(A(x)+M)^{n-1} + A(x)^n + Mn(A(x)+M)^{n-1}\right]$$
$$\le (n+1)(A(x)+M)^n B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big),$$

ce qui démontre le lemme 2. □

Ce résultat fournit une estimation générale, facile à utiliser, comme nous le verrons au paragraphe 4. Il faut cependant garder à l'esprit la possibilité d'obtenir parfois de meilleures majorations grâce à des renseignements supplémentaires, spécifiques au problème considéré.

Ainsi, nous allons conclure ce paragraphe en donnant la démonstration complète du théorème 6. Pour rédiger cette preuve, qui ne figure pas dans [7], nous avons bénéficié de fructueuses conversations avec H. G. Diamond.

On démontre en fait un résultat plus fort que le théorème 6. Soit donc β une suite de nombres premiers généralisés telle que (avec la notation de la proposition 4)

$$\int_1^x \frac{d\Pi(t)}{t} = \int_1^x \frac{1-t^{-1}}{t\log t}dt + \log c + O(\log^{-a} x),$$

où c et a sont des constantes positives. Alors

$$N(x) = cx + O(x\log^{2-a} x).$$

C'est l'énoncé du theorème 3.3a de [7]. Sa démonstration repose sur l'inégalité fondamentale suivante. Si

$$d\nu := t^{-1}(d\Pi - d\tau - (\log c)\delta) \quad \text{et} \quad d\nu_n := (d\nu)^{*n},$$

alors

$$|\nu_n(x)| \le nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}\log^{-a} x$$

pour $n \ge 1, x > 1$, où A_0 et A_1 sont des constantes positives. Observons que l'application du lemme 2 donne ici un facteur supplémentaire n^a.

Pour démontrer cette inégalité, on procède bien entendu par récurrence sur n. Introduisons au préalable des constantes K_1, K_2 et K_3 telles que les inégalités suivantes soient vérifiées pour $x > 1$:

$$|\nu(x)| \le K_1 \log^{-a} x;$$

$$|\nu(x)| \le K_2;$$

$$\|d\nu\|_x \le 2\log\log 3x + K_3.$$

LEMME 3. *Sous les trois hypothèses ci-dessus, on a, pour $n \geq 1$ et $x > 1$,*

$$\int_1^{\sqrt{x}} \left[\left(1 - \frac{\log t}{\log x}\right)^{-a} - 1 \right] |d\nu_n|(t) \leq nK_4 (2 \log\log 3x + K_3)^{n-1},$$

où K_4 est une constante positive.

Démonstration. Si $0 \leq u \leq 1/2$, on a $(1-u)^{-a} - 1 \ll u$. L'inégalité à démontrer est claire si $1 \leq x < 2$, pourvu que K_4 soit assez grande. Si $x \geq 2$, l'intégrale est

$$\ll (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu_n|(t) \leq (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu|^{*n}(t).$$

Comme la multiplication par $\log t$ est une dérivation de $\mathcal{M}$, la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned} n \int_1^{\sqrt{x}} |d\nu|^{*(n-1)} * (\log t |d\nu|)(t) &= n \int_1^{\sqrt{x}} \left(\int_1^{\sqrt{x}/t} |d\nu|^{*(n-1)} \right) \log t |d\nu|(t) \\ &\leq n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log t}{t} (d\Pi + d\tau + |\log c|\delta) \\ &= n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t \Big(d\nu + 2\frac{d\tau}{t} + (\log c + |\log c|)\delta \Big) \\ &\ll n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log x, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant démontrer l'inégalité fondamentale ci-dessus. Posons $A_0 = K_1$ et $A_1 = K_3 + K_4 + 2^a K_2$. L'inégalité étant alors vérifiée pour $n = 1$, supposons la vérifiée au rang n. Nous aurons, pour $x > 1$:

$$\nu_{n+1}(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \nu_n\left(\frac{x}{t}\right) d\nu(t) + \int_1^{\sqrt{x}} \nu\left(\frac{x}{t}\right) d\nu_n(t) - \nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x}).$$

La première intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} nA_0 (2\log\log 3x + A_1)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-a} |d\nu|(t) \\ \leq nA_0 (2\log\log 3x + A_1)^{n-1} (2\log\log 3x + K_3 + K_4) \log^{-a} x. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} K_1 \log^{-a} x \int_1^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\log x}{\log t}\right)^{-a} |d\nu_n|(t) \\ \leq K_1 \log^{-a} x \left[(2\log\log 3x + K_3)^n + nK_4 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\left|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})\right| \leq n2^a K_2 A_0 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1}\log^{-a} x\,.$$

L'inégalité fondamentale au rang $n+1$ résulte donc de :

$$\begin{aligned} &nA_0(L+A_1)^{n-1}(L+K_3+K_4) + K_1(L+K_3)^n \\ &\qquad + nK_1K_4(L+K_3)^{n-1} + 2^aK_2A_0n(L+K_3)^{n-1} \leq (n+1)A_0(L+A_1)^n\,, \end{aligned}$$

où $L := 2\log\log 3x$, et cela est vrai, vu les définitions de A_0 et A_1.

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + td\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c\int_1^x \Big(\int_1^{x/u} \delta + dt\Big) ue^{d\nu} \\ &= cx\int_1^x e^{d\nu} = cx + cx\sum_{n\geq 1}\frac{\nu_n(x)}{n!}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\nu_n(x)}{n!} \leq A_0\log^{-a} x\sum_{n\geq 1}\frac{(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0e^{A_1}(\log 3x)^2\log^{-a} x\,,$$

d'où le résultat.

4. UNE APPLICATION

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

THÉORÈME 9. *Soit* $\boldsymbol{\beta}$ *une suite de nombres premiers généralisés telle que* β_n *diffère du n-ème nombre premier usuel* p_n *par une quantité* $O(n^a)$, *où* $0 \leq a < 1$. *On a alors, pour tout* c *fixé,* $c < \sqrt{2(1-a)}$,

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c}\,,$$

pour $x \geq 3$, *où* $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log\log x}}$.