

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 45 (1999)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY  
**Autor:** Luna, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64453>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

par D. LUNA

ABSTRACT. A new proof is given of a classical result due to Chevalley, concerning the unipotent radical of algebraic groups.

Soit  $G$  un groupe algébrique affine connexe (le corps de base  $k$  étant algébriquement clos), et soit  $T$  un tore maximal de  $G$ .

Lorsqu'on développe la théorie des groupes algébriques (voir par exemple les ouvrages [Bo] ou [Sp]), après quelques généralités (sur la décomposition de Jordan, les espaces homogènes, les groupes résolubles<sup>\*</sup>), ...), on commence par établir certaines propriétés des sous-groupes de Borel : on montre que les sous-groupes de Borel sont conjugués, et que tout sous-groupe de Borel est égal à son normalisateur ; de plus, si  $\mathbf{B}^T$  désigne l'ensemble des sous-groupes de Borel de  $G$  contenant  $T$ , on montre que  $\mathbf{B}^T$  est fini et que le normalisateur  $N_G(T)$  de  $T$  opère transitivement dans  $\mathbf{B}^T$ , etc. Puis on introduit (le radical et) le radical unipotent de  $G$ , noté  $R_u(G)$  dans la suite, et on met le cap sur la structure des groupes semi-simples et réductifs.

C'est ici qu'apparaît le résultat charnière suivant, crucial pour la suite :

THÉORÈME (Chevalley). *La composante neutre de l'intersection des  $R_u(B)$  ( $B \in \mathbf{B}^T$ ), est égale au radical unipotent de  $G$ .*

Les preuves de ce théorème qu'on trouve dans la littérature (voir [Bo] § 13, page 174, ou [Sp] chap. 7, page 130), sont proches de la preuve originale de Chevalley ([Ch], exp. 12). Celle-ci utilise déjà quelques propriétés des « racines » de  $G$  et se trouve ainsi imbriquée dans l'étape suivante de la théorie : en effet, le théorème de Chevalley est utilisé à son tour lorsqu'on

---

<sup>\*</sup>) Pour une présentation simple des théorèmes de structure des groupes algébriques affines résolubles connexes, voir aussi [Do].

montre que les racines de  $G$  forment un « système de racines » (voir [Bo] § 14 et [Sp] chap. 8). Dans cette note, on propose une preuve plus « basique », plus proche de l'esprit géométrique du début de la théorie.

Je voudrais remercier le referee pour ses remarques constructives.

1. Notons  $C$  la composante neutre de l'intersection des  $R_u(B)$  ( $B \in \mathbf{B}^T$ ). Désignons par  $X$  la variété des drapeaux de  $G$ , et par  $X^T$  l'ensemble des points fixes de  $T$  dans  $X$ . Pour tout  $p \in X^T$ , posons  $X(p) = \{x \in X \mid p \in \overline{T \cdot x}\}$ .

PROPOSITION. *Les  $X(p)$  ( $p \in X^T$ ) sont des ouverts affines de  $X$ , stables par  $C$ .*

Montrons d'abord que la proposition implique le théorème. Il est clair que  $R_u(G) \subset C$ . Pour établir l'inclusion opposée, il suffit de montrer que  $C$  opère trivialement dans  $X$ .

Puisque  $T$  et  $C$  sont résolubles connexes et que  $X$  est complet, les seules orbites fermées de  $T$  et de  $C$  dans  $X$  sont les points fixes. Par suite, les  $X(p)$  ( $p \in X^T$ ) recouvrent  $X$ , et pour tout  $x \in X$ , il existe dans  $\overline{C \cdot x}$  un point  $y$  fixé par  $C$ . Si  $p \in X^T$  est tel que  $y \in X(p)$ , alors  $X(p)$  contient aussi  $C \cdot x$ . Mais toute orbite d'un groupe unipotent dans une variété affine est fermée (voir [Bo] page 88, ou [Sp] page 37). D'où  $x = y$ , ce qui montre bien que  $C$  opère trivialement dans  $X$ .

2. Prouvons maintenant la proposition. Comme tout espace homogène, on peut plonger  $X$  dans un  $\mathbf{P}(V)$ , où  $V$  est un  $G$ -module rationnel de dimension finie. On peut supposer que  $X$  ne soit contenu dans aucun  $\mathbf{P}(W)$ , quel que soit l'espace linéaire propre  $W$  de  $V$ . Choisissons un groupe à un paramètre multiplicatif  $\lambda: k^* \rightarrow T$  tel que  $k^*$ , opérant dans  $V$  à travers  $\lambda$ , ait les mêmes vecteurs propres que  $T$ .

On utilisera la « décomposition de Białyński-Birula » de  $X$  associée à  $\lambda$  (voir [B-B] et aussi [Bo], 13.3). Pour tout  $p \in X^T$ , posons

$$X(\lambda, p) = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x = p\}.$$

Les  $X(\lambda, p)$  ( $p \in X^T$ ) sont localement fermés dans  $X$  et leur réunion (disjointe) est égale à  $X$ . Puisque  $X^T$  est fini, il existe un (unique)  $p^\circ \in X^T$  tel que  $X(\lambda, p^\circ)$  est ouvert dans  $X$ . Pour tout  $v \in V \setminus \{0\}$ , notons  $[v]$  le point de  $\mathbf{P}(V)$  « en dessous » de  $v$ . Soit  $v_1, \dots, v_d$  une base de  $V$ , formée de vecteurs propres de  $T$ , et telle que  $[v_1] = p^\circ$ . Soient  $n_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) les entiers tels

que  $\lambda(t)v_i = t^{n_i}v_i$ . Désignons par  $V^*$  l'espace vectoriel dual de  $V$ , et par  $v_1^*, \dots, v_d^*$  la base duale de  $V^*$ . Comme on suppose que  $X$  n'est contenu dans aucun  $\mathbf{P}(W)$ ,  $W$  sous-espace linéaire propre de  $V$ , il existe  $[v] \in X(\lambda, p^\circ)$  tel que  $\langle v, v_i^* \rangle \neq 0$  quel que soit  $i = 1, \dots, d$ . On en déduit que  $n_1 < n_i$  ( $i \geq 2$ ), et que  $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^* \rangle \neq 0\}$ . En particulier  $X(\lambda, p^\circ)$  est un ouvert affine de  $X$ .

Montrons que  $X(\lambda, p^\circ)$  est stable par  $C$ . Désignons par  $v_1^\perp$  l'hyperplan de  $V^*$  orthogonal à  $v_1$ . Le groupe  $G$  opère aussi dans  $V^*$  et  $\mathbf{P}(V^*)$ . Si  $G \cdot w$  est une orbite de  $G$  contenue dans  $v_1^\perp$ , alors  $w$  est orthogonal à tout vecteur de  $G \cdot v_1$ , donc  $w = 0$  (car  $G \cdot v_1$  engendre  $V$  comme espace vectoriel). Par conséquent, toute orbite de  $G$  dans  $\mathbf{P}(V^*)$  rencontre  $\mathbf{P}(V^*) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$ . Puisque  $\lambda(t)v_i^* = t^{-n_i}v_i^*$  ( $i = 1, \dots, d$ ), tout  $y \in \mathbf{P}(V^*) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$  vérifie  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot y = [v_1^*]$ , d'où il suit que l'orbite  $G \cdot [v_1^*]$  est fermée dans  $\mathbf{P}(V^*)$ . Notons  $P$  le groupe d'isotropie de  $G$  en  $[v_1^*]$ . Comme  $P$  est parabolique et contient  $T$ ,  $P$  contient un  $B \in \mathbf{B}^T$ . Par suite  $C$  est contenu dans  $P$ . Comme  $C$  est unipotent, il fixe non seulement  $[v_1^*]$  mais aussi  $v_1^*$ . Puisque  $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^* \rangle \neq 0\}$ , il s'ensuit bien que  $X(\lambda, p^\circ)$  est stable par  $C$ .

Enfin, on a  $X(\lambda, p^\circ) = X(p^\circ)$  (en effet  $X(\lambda, p^\circ) \subset X(p^\circ)$  est vrai par définition, et l'autre inclusion vient du fait que  $X(\lambda, p^\circ)$  est ouvert, stable par  $T$ , et contient  $p^\circ$ ). Le groupe  $N_G(T)$ , qui opère transitivement dans  $X^T$ , permute les  $X(p)$  ( $p \in X^T$ ). Par ailleurs,  $N_G(T)$  normalise visiblement  $C$ . Par conséquent, tous les  $X(p)$  ( $p \in X^T$ ) sont des ouverts affines de  $X$ , stables par  $C$ .  $\square$

REMARQUE. Un peu plus loin dans la théorie, on peut montrer que les  $X(\lambda, p)$  ( $p \in X^T$ ) ci-dessus sont en fait les cellules de la «décomposition de Bruhat» (voir [Bo] §14 et [Sp] chap. 8). Les  $X(p)$  ( $p \in X^T$ ) ne sont donc rien d'autre que les «grosses cellules» associées aux différents  $B \in \mathbf{B}^T$ .

## RÉFÉRENCES

- [Bo] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups*. Second Enlarged Edition, Springer-Verlag (1991).
- [B-B] BIAŁYNIICKI-BIRULA, A. Some theorems on actions of algebraic groups. *Ann. of Math.* 98 (1973), 480–497.
- [Ch] CHEVALLEY, C. *Classification des groupes de Lie algébriques*. Séminaire de l'École Normale Supérieure, Paris, 1956–1958.

- [Do] DOKOVIC, D. Z. An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups. *L'Enseignement Mathématique* 34 (1988), 269–273.
- [Sp] SPRINGER, T. A. *Linear Algebraic Groups*. Second Edition, Birkhäuser (1998).

*(Reçu le 15 avril 1999)*

D. Luna

Institut Fourier  
B.P. 74  
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex  
France