Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

Rubrik

Autor: Luna, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64453

montre que les racines de G forment un «système de racines» (voir [Bo] §14 et [Sp] chap. 8). Dans cette note, on propose une preuve plus «basique», plus proche de l'esprit géométrique du début de la théorie.

Je voudrais remercier le referee pour ses remarques constructives.

1. Notons C la composante neutre de l'intersection des $R_u(B)$ ($B \in \mathbf{B}^T$). Désignons par X la variété des drapeaux de G, et par X^T l'ensemble des points fixes de T dans X. Pour tout $p \in X^T$, posons $X(p) = \{x \in X \mid p \in \overline{T \cdot x}\}$.

Proposition. *Les $X(p)$ ($p \in X^T$) sont des ouverts affines de X, stables par C.*

Montrons d'abord que la proposition implique le théorème. Il est clair que $R_u(G) \subset C$. Pour établir l'inclusion opposée, il suffit de montrer que C opère trivialement dans X.

Puisque T et C sont résolubles connexes et que X est complet, les seules orbites fermées de T et de C dans X sont les points fixes. Par suite, les $X(p)$ ($p \in X^T$) recouvrent X, et pour tout $x \in X$, il existe dans $\overline{C \cdot x}$ un point y fixé par C. Si $p \in X^T$ est tel que $y \in X(p)$, alors $X(p)$ contient aussi $C \cdot x$. Mais toute orbite d'un groupe unipotent dans une variété affine est fermée (voir [Bo] page 88, ou [Sp] page 37). D'où $x = y$, ce qui montre bien que C opère trivialement dans X.

2. Prouvons maintenant la proposition. Comme tout espace homogène, on peut plonger X dans un $\mathbf{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. On peut supposer que X ne soit contenu dans aucun $\mathbf{P}(W)$, quel que soit l'espace linéaire propre W de V. Choisissons un groupe à un paramètre multiplicatif $\lambda\colon k^\star \to T$ tel que $k^\star$, opérant dans V à travers λ, ait les mêmes vecteurs propres que T.

On utilisera la «décomposition de Białynicki-Birula» de X associée à λ (voir [B-B] et aussi [Bo], 13.3). Pour tout $p \in X^T$, posons

$$X(\lambda, p) = \{x \in X \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x = p\}.$$

Les $X(\lambda, p)$ ($p \in X^T$) sont localement fermés dans X et leur réunion (disjointe) est égale à X. Puisque X^T est fini, il existe un (unique) $p^\circ \in X^T$ tel que $X(\lambda, p^\circ)$ est ouvert dans X. Pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, notons $[v]$ le point de $\mathbf{P}(V)$ «en dessous» de v. Soit $v_1, \ldots, v_d$ une base de V, formée de vecteurs propres de T, et telle que $[v_1] = p^\circ$. Soient n_i ($i = 1, \ldots, d$) les entiers tels