

4.3 Mean operator on the hyperbolic plane

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

For the above values, f is an eigenfunction of the operator P and satisfies the generalized Følner condition. By Theorem 3 the norm of the random walk operator on $\mathbf{Z}_2 \star \mathbf{Z}_4$ with the generating subset as defined before is then equal to

$$\|P\| = \frac{\sqrt{33} + 7}{\sqrt{\sqrt{33} - 1}} \approx 0.98.$$

4.2.2 GENERAL CASE

The idea presented for $\mathbf{Z}_2 \star \mathbf{Z}_4$ can be used in the general case for $\mathbf{Z}_n \star \mathbf{Z}_m$. As the solution involves roots of some polynomial of degree nm , we will not give details.

4.3 MEAN OPERATOR ON THE HYPERBOLIC PLANE

Let us consider the hyperbolic upper half-plane $H = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ with a Riemannian metric $d_{Hz} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$ which gives rise to the measure $\mu_H = \frac{dx dy}{y^2}$. We consider the operator P ,

$$Pf(z_0) = \int_{|z-z_0|=R} f(z) dm_R(z),$$

where dm_R is a uniform probability measure on a hyperbolic circle of radius R . We want to compute the norm of the operator P acting on $L^2(H, d_{Hz})$.

First of all let us remark that the function:

$$(11) \quad f(z) = \sqrt{\operatorname{Im}(z)},$$

is an eigenfunction of P . An easy way to see this is to note that P commutes with isometries of H and that the isometries consisting of horizontal translations and homotheties act transitively on H . The effect of these on the function f is that they just multiply it by a constant.

Now we would like to show that one can find a Følner sequence with respect to the function f . Let us consider a sequence $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ of rectangles (in the Euclidean sense) in H :

$$A_n = \{z \in H; e^{-n} \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq n\}.$$

It is easy to see that the measure $|\partial A_n|$ of the boundary of A_n is bounded by the measure of the following set B_n (see Figure 5):

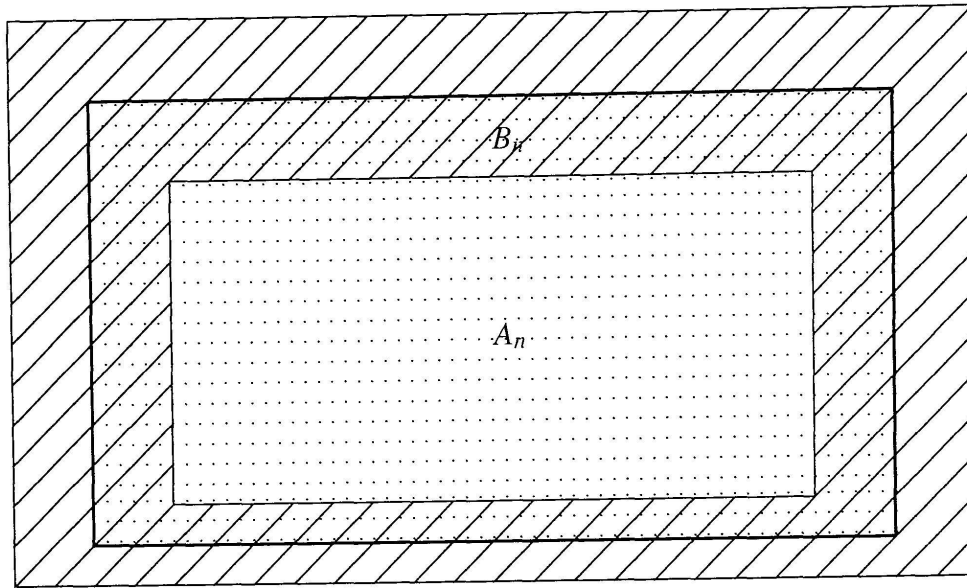


FIGURE 5
Sets A_n and B_n

$$\begin{aligned}
 B_n = & \{z \in H; -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq R, e^R \geq \operatorname{Im}(z) \geq e^{-n-R}\} \\
 & \cup \{z \in H; -R+n \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+R, e^R \geq \operatorname{Im}(z) \geq e^{-n-R}\} \\
 & \cup \{z \in H; -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+R, e^R \geq \operatorname{Im}(z) \geq e^{-R}\} \\
 & \cup \{z \in H; -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+R, e^{-n+R} \geq \operatorname{Im}(z) \geq e^{-n-R}\}.
 \end{aligned}$$

One can see that

$$|B_n|_{f^2} \approx n, \quad |A_n|_{f^2} \approx n^2.$$

This shows that $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ is a generalized Følner sequence. Thus

$$\|P\|_{L^2(H, d_{Hz}) \rightarrow L^2(H, d_{Hz})} = \int_{|z-i|=R} \sqrt{\operatorname{Im}(z)} \, dm_R(z).$$

4.4 WREATH PRODUCTS

Let G and F be finitely generated groups. We define the wreath product $G \wr F$ of these groups as follows. Elements of $G \wr F$ are couples (g, γ_1) where $g: F \rightarrow G$ is a function such that $g(\gamma)$ is different from the identity element id_G of G only for finitely many elements γ in F , and where γ_1 is an element of F . The multiplication in $G \wr F$ is defined as follows:

$$(g_1, \gamma_1)(g_2, \gamma_2) = (g_3, \gamma_1\gamma_2)$$

where