

## 2. PROOF OF THE THEOREM

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**THEOREM.** *Let  $n$  be a positive, squarefree integer with either  $n \equiv 1 \pmod{4}$  or  $n \equiv 2 \pmod{4}$  and with  $(a, 2n) = 1$ , and let  $j$  be a positive integer with  $(j, 2n) = 1$  and  $1 \leq j \leq n$ . Then if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = +1$ , we have*

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\left[\frac{4in}{j}\right]+1}^{\left[\frac{(4i+2)n}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right),$$

and if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = -1$ , then we have

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\left[\frac{(4i-2)n}{j}\right]+1}^{\left[\frac{4in}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right).$$

If  $j = 1$ , the result is due to Dirichlet [3], [4]. We illustrate the theorem when  $n = 13$  and  $j = 3$ . Then  $\left(\frac{-52}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$ . Thus

$$h(-13) = \frac{1}{2} \sum_{a=9}^{17} \left(\frac{-52}{a}\right).$$

Now  $\left(\frac{-52}{9}\right) = \left(\frac{-52}{11}\right) = \left(\frac{-52}{15}\right) = \left(\frac{-52}{17}\right) = +1$ , and so  $h(-13) = \frac{1}{2}(4) = 2$ . The study of class numbers relating values of the Jacobi symbol  $\left(\frac{a}{n}\right)$  to  $h(-n)$  when  $n \equiv 3 \pmod{4}$  in subintervals other than  $(0, \frac{n}{2})$  has been given by numerous authors. These include among others, Berndt [1], Berndt and Chowla [2], Dirichlet [3]–[4], Holden [5]–[11], Hudson and Williams [12], Johnson and Mitchell [13], Karpinski [14], and Lerch [15]–[16]. A partial summary of these results appears in [12].

## 2. PROOF OF THE THEOREM

We first note that  $j$  is an odd, positive integer with  $(j, n) = 1$ . We write

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a, 2n)=1}}^{2n-1} \left(\frac{-4n}{a}\right) = \sum_{r=0}^{j-1} S_r$$

where

$$S_r = \sum_{\substack{a=1 \\ a \equiv r \pmod{j} \\ (a,2n)=1}}^{2n-1} \left( \frac{-4n}{a} \right).$$

If  $1 \leq r \leq j-1$ , then there exists a unique integer  $k$  such that  $1 \leq k \leq j-1$  and  $2kn \equiv r \pmod{j}$  because  $(j, n) = 1$ . If  $a \equiv r \pmod{j}$  with  $1 \leq a \leq 2n-1$  and  $(a, 2n) = 1$ , then we observe that  $2kn - a \equiv 0 \pmod{j}$ . Now

$$\left( \frac{-4n}{a} \right) = \left( \frac{-4n}{2kn - a} \right)$$

if  $k$  is odd, and

$$\left( \frac{-4n}{a} \right) = - \left( \frac{-4n}{2kn - a} \right)$$

if  $k$  is even. Thus,

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_{\substack{a=(2k-2)n \\ a \equiv 0 \pmod{j} \\ (a,2n)=1}}^{2kn} \left( \frac{-4n}{2kn - a} \right) \\ &= \pm \sum_{\substack{a=(2k-2)n \\ a \equiv 0 \pmod{j} \\ (a,2n)=1}}^{2kn} \left( \frac{-4n}{a} \right) \\ &= \pm \left( \frac{-4n}{j} \right) \sum_{\substack{a=[\frac{(2k-2)n}{j}] + 1 \\ (a,2n)=1}}^{[\frac{2kn}{j}]} \left( \frac{-4n}{a} \right) \end{aligned}$$

where the plus sign holds if  $k$  is odd and the minus sign holds if  $k$  is even. Thus we have for each  $j$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{-4n}{j} \right) \sum_{\substack{k=1 \\ (k,2)=2}}^j \sum_{\substack{a=[\frac{(2k-2)n}{j}] + 1 \\ (a,2n)=1}}^{[\frac{2kn}{j}]} \left( \frac{-4n}{a} \right) \\ &+ \left( \frac{-4n}{j} \right) \sum_{\substack{k=1 \\ (k,2)=1}}^j \sum_{\substack{a=[\frac{(2k-2)n}{j}] + 1 \\ (a,2n)=1}}^{[\frac{2kn}{j}]} \left( \frac{-4n}{a} \right) - \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2n)=1}}^{2n-1} \left( \frac{-4n}{a} \right). \end{aligned}$$

It then follows that

$$0 = -2 \sum_{\substack{k=1 \\ (k,2)=2}}^j \sum_{\substack{a=\left[\frac{(2k-2)n}{j}\right]+1 \\ (a,2n)=1}}^{\left[\frac{2kn}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right)$$

if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = +1$ , and

$$0 = -2 \sum_{\substack{k=1 \\ (k,2)=1}}^j \sum_{\substack{a=\left[\frac{(2k-2)n}{j}\right]+1 \\ (a,2n)=1}}^{\left[\frac{2kn}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right)$$

if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = -1$ . In the case that  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = +1$ , we are only considering those  $k$  which are even, and so we may write  $k = 2i$ . In the case that  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = -1$ , we are only considering those  $k$  which are odd, and so we may write  $k = 2i + 1$ .

Thus we have proven that for each  $j$ ,

$$0 = \sum_{i=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \sum_{\substack{a=\left[\frac{(4i-2)n}{j}\right]+1 \\ (a,2n)=1}}^{\left[\frac{4in}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right)$$

if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = +1$ , and

$$0 = \sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \sum_{\substack{a=\left[\frac{4in}{j}\right]+1 \\ (a,2n)=1}}^{\left[\frac{(4i+2)n}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right)$$

if  $\left(\frac{-4n}{j}\right) = -1$ . These subintervals clearly cover  $[1, 2n - 1]$  and are non-overlapping. Now Dirichlet [3], [4] showed that

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,2n)=1}}^{2n-1} \left(\frac{-4n}{a}\right) = 2h(-n).$$

It follows at once that

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\lfloor \frac{4i}{j} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{(4i+2)n}{j} \rfloor} \left( \frac{-4n}{a} \right)$$

if  $\left( \frac{-4n}{j} \right) = +1$ , and

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\lfloor \frac{(4i-2)n}{j} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{4in}{j} \rfloor} \left( \frac{-4n}{a} \right)$$

if  $\left( \frac{-4n}{j} \right) = -1$ .

### 3. REMARKS

In Bruce Berndt's paper "Classical Theorems on Quadratic Residues" [1], he uses the following notation:

$$S_{ji} = \sum_{\frac{(i-1)k}{j} < n < \frac{ik}{j}} \chi(n).$$

Using this notation, we can rewrite the class number formulae as follows:

1. If  $\left( \frac{-4n}{j} \right) = +1$ , then we have

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}} S_{j,2i+1}.$$

2. If  $\left( \frac{-4n}{j} \right) = -1$ , then we have

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{j-1}{2}} S_{j,2i}.$$

### 4. ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank Zekeriya Tufekci at Clemson University for numerical data which assisted us in obtaining the results in this paper.