

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

A LOCAL-GLOBAL PRINCIPLE  
FOR NORMS FROM CYCLIC EXTENSIONS OF  $\mathbf{Q}(t)$   
(A DIRECT, CONSTRUCTIVE AND QUANTITATIVE APPROACH)

by Umberto ZANNIER

ABSTRACT. Let  $L$  be a cyclic extension of  $\mathbf{Q}(t)$ , regular over  $\mathbf{Q}$ . We are concerned with the representability of a rational function  $f \in \mathbf{Q}(t)$  as a norm  $N_{\mathbf{Q}(t)}^L(g)$  where  $g \in L$ . This problem was treated by Davenport-Lewis-Schinzel in the special case  $[L : \mathbf{Q}(t)] = 2$ . They obtained a kind of local-global principle by proving that  $f$  is representable in the required way if, for a suitable set of integers  $n$ ,  $f(n)$  is likewise representable as a value of the norm-form specialized at  $t = n$ . In case  $[L : \mathbf{Q}(t)]$  is arbitrary, it does not seem easy to extend their arguments, but a similar conclusion is a corollary of certain results on specializations of Brauer groups, obtained independently by several authors. Here we treat the general case by means of a direct method, which is self-contained as far as cohomology is concerned. Moreover our arguments are constructive and allow one to decide about the above-mentioned representability and to produce solutions when they exist. As in previous work by Serre, the method yields quantitative estimates, via sieve inequalities. We also discuss several other relevant questions.

1. INTRODUCTION

The well-known Hasse local-global principle for a cyclic extension  $L/K$  of number fields (see e.g. [CF, p. 185]) asserts that an element  $a \in K^*$  is a norm from  $L^*$  (i.e. of the form  $N_K^L(b)$  for some  $b \in L^*$ ) if and only if for every place  $v$  of  $K$  and some (= all) place(s)  $w$  of  $L$ , with  $w|v$ , we have  $a \in N_{K_v}^{L_w}(L_w^*)$  (where the subscripts denote completions). Actually Hasse's theorem holds more generally when  $L/K$  is any cyclic extension of *global fields*; these are either number fields or function fields of curves over finite fields, namely finite extensions of some field  $\mathbf{F}_q(t)$ .

It seems natural to investigate what happens when  $L/K$  is a cyclic extension of function fields of curves over number fields. Let us concentrate on the case when the base is rational, namely  $K = k(t)$ , where  $k$  is a number field.