

## 2.3 Le cas hyperbolique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

par  $f^k$  et sont donc en nombre fini. Par ailleurs, toute suite  $y'_i \in R_a(\theta)$  est à distance hyperbolique bornée d'une suite extraite  $y_{n_i}$  et ses valeurs d'adhérence sont donc aussi des points fixes de  $f^k$ . Comme l'accumulation du rayon est connexe, elle est réduite à un point.

b) La preuve est plus difficile et on n'en donne qu'une idée très succincte pour un point  $k$ -périodique répulsif  $x$ . D'après un théorème classique de G. Kœnigs,  $x$  possède un voisinage  $U$  sur lequel  $f$  est analytiquement conjuguée à l'application  $z \mapsto \lambda z$  où  $\lambda = (f^k)'(x)$ . On voit facilement que chaque composante connexe  $V$  de  $U \setminus K(f)$  est simplement connexe et le point délicat est de montrer qu'elle est périodique par  $f^k$ , *i.e.* que  $f^{ki}(V) \supset V$  pour un certain entier  $i$ . On vérifie ensuite que l'anneau  $V/f^{ki}$  obtenu en quotientant  $V$  par la relation d'équivalence  $x \sim f^{ki}(x)$ , avec sa métrique hyperbolique, a une géodésique fermée et celle-ci se relève alors en le rayon externe cherché.  $\square$

Dans le bassin  $B(a)$ , on a en outre le résultat suivant qui, compte tenu du théorème de Carathéodory [C], montre que le bord  $\partial B(a)$  est une courbe de Jordan dès qu'il est localement connexe :

LEMME 2.5. *Si deux rayons issus de  $a$  (d'angles rationnels ou non) aboutissent en un même point de  $\partial B(a)$ , ils sont égaux.*

*Preuve.* Sinon, les deux rayons forment, avec leur point d'aboutissement  $x$ , une courbe de Jordan qui borde un ouvert connexe borné  $U$ . Comme  $\partial U$  est inclus dans  $\bar{B}(a)$  qui est compact et invariant par  $f$ , le principe du maximum assure que la famille  $f^n$ ,  $n \geq 0$ , est bornée sur  $U$  et donc normale. Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de montrer que  $U$  rencontre  $J(f)$ . Or, si ce n'est pas le cas,  $x$  est le seul point sur lequel peuvent s'accumuler les rayons  $R_a(\theta)$  contenus dans  $U$  et, par suite, tous ces rayons convergent vers  $x$ . Les angles de ces rayons forment un intervalle de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et, comme la multiplication par deux est dilatante, on voit que tout rayon issu de  $a$  aboutit en  $x$ , ce qui est absurde.  $\square$

### 2.3 LE CAS HYPERBOLIQUE

On suppose ici que  $-a$  se trouve soit dans  $B(a)$ , soit dans  $B(\infty)$ . On note  $P(f)$  l'ensemble post-critique de  $f$  — *i.e.* l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de  $f$  — et on pose  $U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus P(f)$ . Comme  $P(f)$  contient au moins  $-a$ ,  $a$  et  $\infty$ , le revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$  est un disque — sauf si  $a = 0$ , auquel cas l'ensemble de Julia est exactement le cercle

unité puisque  $f(x) = x^{d+1}$  — et on désigne par  $\pi$  la projection  $\tilde{U} \rightarrow U$ . Par ailleurs,  $f^{-1}(U) \subset U$  car  $f$  envoie  $P(f)$  dans lui-même.

LEMME 2.6. *Au voisinage de  $J(f)$ , l'application  $f$  dilate exponentiellement la métrique hyperbolique de  $U$ .*

*Preuve.* On va construire une application holomorphe  $g$  de  $\tilde{U}$  dans  $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) \subset \tilde{U}$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{g} & \pi^{-1}(f^{-1}(U)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xleftarrow{f} & f^{-1}(U) \end{array}$$

et a un point fixe attractif. Le lemme découle alors du fait que, d'après le lemme de Schwarz,  $g$  contracte exponentiellement la métrique hyperbolique du disque  $\tilde{U}$  sur tout compact de  $\tilde{U}$ .

Pour trouver  $g$ , on note d'abord que  $J(f)$  contient au moins un point fixe répulsif, par exemple le point d'aboutissement  $y_0$  du rayon  $R_a(0)$  (celui-ci n'est pas parabolique car il n'est pas dans  $P(f)$ ). D'autre part,  $f: f^{-1}(U) \rightarrow U$  est une application holomorphe propre sans points critiques, donc un revêtement. On obtient  $g$  en relevant  $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$  à ce revêtement puis à  $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$  en une application fixant une préimage de  $y_0$  dans  $\tilde{U}$ .  $\square$

On suppose maintenant que  $-a$  est dans  $B(\infty)$ . Si  $\phi_a: \mathbf{D} \rightarrow B(a)$  est une représentation conforme fournie par la proposition 2.3, on regarde les applications

$$\gamma_n: \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}, \quad t \longmapsto \gamma_n(t) = \phi_a\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/d^n} e^{2i\pi t}\right).$$

LEMME 2.7. *La suite  $\gamma_n$  converge uniformément vers une application surjective de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  dans  $\partial B(a)$ . Par suite,  $\partial B(a)$  est localement connexe.*

*Preuve.* Pour  $n_0$  assez grand, l'image de  $\gamma_{n_0}$  est dans le voisinage de  $J(f)$  où  $f$  dilate la métrique hyperbolique de  $U$ . On note alors  $\lambda > 1$  la constante de dilatation de la métrique et on pose

$$C = \sup\{\text{dist}_U(\gamma_{n_0}(t), \gamma_{n_0+1}(t)), t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\}.$$

Le fait que  $f$  envoie chaque rayon dans  $B(a)$  sur un autre rayon assure que, pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ,

$$\text{dist}_U(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \leq C\lambda^{n_0-n},$$

ce qui entraîne la convergence uniforme voulue.  $\square$

Si maintenant  $-a$  est dans  $B(a)$ , alors  $f^{-1}(B(a)) = B(a)$ . Il en découle l'égalité  $\partial B(a) = J(f) = \partial B(\infty)$ . En effet, tout point  $x$  qui n'est pas dans  $\bar{B}(a)$  a un voisinage  $V$  disjoint de  $\bar{B}(a)$ . Par suite, toutes ses images itérées  $f^n(V)$  évitent  $\bar{B}(a)$ , ce qui montre que la famille  $\{f^n\}$  est normale sur  $V$ , donc que  $x$  n'appartient pas à  $J(f)$ . On applique alors à une représentation de Böttcher  $\phi: \mathbf{D} \rightarrow B(\infty)$  le même raisonnement que plus haut pour montrer que  $\partial B(a)$  est une image continue du cercle.

Il reste à voir que  $\partial B(a)$  est bien une courbe de Jordan. On distingue deux cas :

Si  $-a$  est dans  $B(\infty)$ , la représentation conforme  $\phi_a: \mathbf{D} \rightarrow B(a)$  est bien définie et le résultat découle alors du lemme 2.5.

Si  $-a$  est dans  $B(a)$ , en conjuguant  $f$  par une transformation de Möbius  $\Phi$  qui échange  $a$  et  $\infty$ , on obtient un polynôme  $g$  qui possède un point fixe super-attractif  $\Phi(\infty)$  et dont le bassin immédiat ( $\Phi(B(\infty))$ ) ne contient pas d'autres points critiques. Dans ce cas on a bien une représentation conforme du bassin immédiat à laquelle on peut alors appliquer le lemme 2.5.

#### 2.4 CONSTRUCTION DE GRAPHES ADMISSIBLES

On suppose désormais que le point critique libre  $-a$  n'est ni dans  $B(a)$  ni dans  $B(\infty)$  et on regarde le polynôme  $f$  comme une application à allure rationnelle de  $X'$  dans  $X$  où

$$X = \mathbf{C} \setminus \left( \phi_a((1/2)\bar{\mathbf{D}}) \cup \phi((1/2)\bar{\mathbf{D}}) \right) \quad \text{et} \quad X' = f^{-1}(X).$$

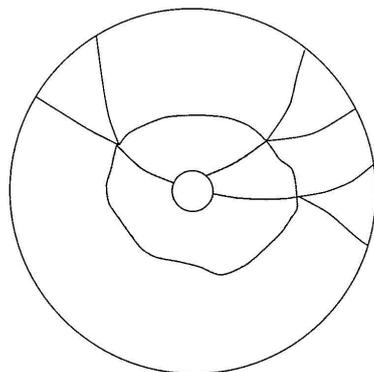


FIGURE 1

Le graphe  $\Gamma(\theta)$  avec, en gris, le bassin immédiat  $B(a)$  privé de  $\phi_a((1/2)\bar{\mathbf{D}})$