Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PUZZLES DE YOCCOZ POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE

Autor: ROESCH, Pascale

Kapitel: 2.3 Le cas hyperbolique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64443

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

par f^k et sont donc en nombre fini. Par ailleurs, toute suite $y'_i \in R_a(\theta)$ est à distance hyperbolique bornée d'une suite extraite y_{n_i} et ses valeurs d'adhérence sont donc aussi des points fixes de f^k. Comme l'accumulation du rayon est connexe, elle est réduite à un point.

b) La preuve est plus difficile et on n'en donne qu'une idée très succincte pour un point k-périodique répulsif x. D'après un théorème classique de G. Kœnigs, x possède un voisinage U sur lequel f est analytiquement conjuguée à l'application $z \mapsto \lambda z$ où $\lambda = (f^k)'(x)$. On voit facilement que chaque composante connexe V de $U \setminus K(f)$ est simplement connexe et le point délicat est de montrer qu'elle est périodique par f^k, *i.e.* que $f^{ki}(V) \supset V$ pour un certain entier i. On vérifie ensuite que l'anneau V/f^{ki} obtenu en quotientant V par la relation d'équivalence $x \sim f^{ki}(x)$, avec sa métrique hyperbolique, a une géodésique fermée et celle-ci se relève alors en le rayon externe cherché. □

Dans le bassin $B(a)$, on a en outre le résultat suivant qui, compte tenu du théorème de Carathéodory [C], montre que le bord $\partial B(a)$ est une courbe de Jordan dès qu'il est localement connexe :

LEMME 2.5. *Si deux rayons issus de a (d'angles rationnels ou non) aboutissent en un même point de $\partial B(a)$, ils sont égaux.*

Preuve. Sinon, les deux rayons forment, avec leur point d'aboutissement x, une courbe de Jordan qui borde un ouvert connexe borné U. Comme ∂U est inclus dans $\bar{B}(a)$ qui est compact et invariant par f, le principe du maximum assure que la famille f^n, $n \geq 0$, est bornée sur U et donc normale. Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de montrer que U rencontre $J(f)$. Or, si ce n'est pas le cas, x est le seul point sur lequel peuvent s'accumuler les rayons $R_a(\theta)$ contenus dans U et, par suite, tous ces rayons convergent vers x. Les angles de ces rayons forment un intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et, comme la multiplication par deux est dilatante, on voit que tout rayon issu de a aboutit en x, ce qui est absurde. □

2.3 LE CAS HYPERBOLIQUE

On suppose ici que $-a$ se trouve soit dans $B(a)$, soit dans $B(\infty)$. On note $P(f)$ l'ensemble post-critique de f — *i.e.* l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de f — et on pose $U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus P(f)$. Comme $P(f)$ contient au moins $-a$, a et ∞, le revêtement universel $\widetilde{U}$ de U est un disque — sauf si $a = 0$, auquel cas l'ensemble de Julia est exactement le cercle

unité puisque $f(x) = x^{d+1}$ — et on désigne par π la projection $\widetilde{U} \to U$. Par ailleurs, $f^{-1}(U) \subset U$ car f envoie $P(f)$ dans lui-même.

LEMME 2.6. *Au voisinage de $J(f)$, l'application f dilate exponentiellement la métrique hyperbolique de U.*

Preuve. On va construire une application holomorphe g de $\widetilde{U}$ dans $\pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) \subset \widetilde{U}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) \arrow[d, "\pi"] \\ U & f^{-1}(U) \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

et a un point fixe attractif. Le lemme découle alors du fait que, d'après le lemme de Schwarz, g contracte exponentiellement la métrique hyperbolique du disque $\widetilde{U}$ sur tout compact de $\widetilde{U}$.

Pour trouver g, on note d'abord que $J(f)$ contient au moins un point fixe répulsif, par exemple le point d'aboutissement y_0 du rayon $R_a(0)$ (celui-ci n'est pas parabolique car il n'est pas dans $P(f)$). D'autre part, $f : f^{-1}(U) \to U$ est une application holomorphe propre sans points critiques, donc un revêtement. On obtient g en relevant $\pi : \widetilde{U} \to U$ à ce revêtement puis à $\pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ en une application fixant une préimage de y_0 dans $\widetilde{U}$. $\square$

On suppose maintenant que $-a$ est dans $B(\infty)$. Si $\phi_a : \mathbf{D} \to B(a)$ est une représentation conforme fournie par la proposition 2.3, on regarde les applications

$$\gamma_n : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}, \quad t \longmapsto \gamma_n(t) = \phi_a\big((1/2)^{1/d^n} e^{2i\pi t}\big) .$$

LEMME 2.7. *La suite γ_n converge uniformément vers une application surjective de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans $\partial B(a)$. Par suite, $\partial B(a)$ est localement connexe.*

Preuve. Pour n_0 assez grand, l'image de γ_{n_0} est dans le voisinage de $J(f)$ où f dilate la métrique hyperbolique de U. On note alors $\lambda > 1$ la constante de dilatation de la métrique et on pose

$$C = \sup\{\mathrm{dist}_U\big(\gamma_{n_0}(t), \gamma_{n_0+1}(t)\big),\ t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\} .$$

Le fait que f envoie chaque rayon dans $B(a)$ sur un autre rayon assure que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$,

$$\mathrm{dist}_U\big(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)\big) \leq C\lambda^{n_0-n},$$

ce qui entraîne la convergence uniforme voulue. $\square$

Si maintenant $-a$ est dans $B(a)$, alors $f^{-1}\big(B(a)\big) = B(a)$. Il en découle l'égalité $\partial B(a) = J(f) = \partial B(\infty)$. En effet, tout point x qui n'est pas dans $\bar{B}(a)$ a un voisinage V disjoint de $\bar{B}(a)$. Par suite, toutes ses images itérées $f^n(V)$ évitent $\bar{B}(a)$, ce qui montre que la famille $\{f^n\}$ est normale sur V, donc que x n'appartient pas à $J(f)$. On applique alors à une représentation de Böttcher $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$ le même raisonnement que plus haut pour montrer que $\partial B(a)$ est une image continue du cercle.

Il reste à voir que $\partial B(a)$ est bien une courbe de Jordan. On distingue deux cas :

Si $-a$ est dans $B(\infty)$, la représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ est bien définie et le résultat découle alors du lemme 2.5.

Si $-a$ est dans $B(a)$, en conjuguant f par une transformation de Mœbius Φ qui échange a et ∞, on obtient un polynôme g qui possède un point fixe super-attractif $\Phi(\infty)$ et dont le bassin immédiat $(\Phi(B(\infty)))$ ne contient pas d'autres points critiques. Dans ce cas on a bien une représentation conforme du bassin immédiat à laquelle on peut alors appliquer le lemme 2.5.

2.4 Construction de graphes admissibles

On suppose désormais que le point critique libre $-a$ n'est ni dans $B(a)$ ni dans $B(\infty)$ et on regarde le polynôme f comme une application à allure rationnelle de X' dans X où

$$X = \mathbf{C} \setminus \Big(\phi_a\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big) \cup \phi\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big)\Big) \quad \text{et} \quad X' = f^{-1}(X).$$

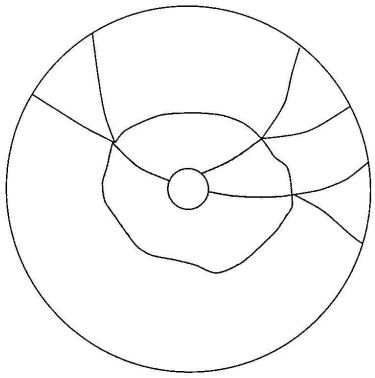

FIGURE 1

Le graphe $\Gamma(\theta)$ avec, en gris, le bassin immédiat $B(a)$ privé de $\phi_a\big((1/2)\mathbf{D}\big)$