# 2.5 Cas d'un bout critique périodique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

En résumé, les lemmes 2.9, 2.10 et 1.12 garantissent que, pour tout point $x$ de $\partial B(a)$, l'un des graphes $\Gamma(\theta)$, ou $\Gamma(1-\theta)$ bague infiniment $x$ et bague le point critique $-a$. Le théorème de Yoccoz 1.10 et le lemme 2.11 ci-dessous assurent alors que $\partial B(a)$ est localement connexe en $x$ ce qui achève la preuve du théorème 2.1, sauf dans la cas où le bout de $-a$ est périodique et si $x$ tombe dans $\mathrm{Imp}(-a)$ par itération. C'est ce cas qu'il reste à étudier dans la partie suivante 2.5.

Pour trouver des voisinages connexes d'un point $x$ de $\partial B(a)$, on va extraire de chaque intersection $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ un voisinage connexe de $x$ dans $\partial B(a)$ qui est de la forme $\bigcap_{u \in ]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau')$ avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où

$$Q(u, \tau, \tau') = \left\{ \phi_a(r\, e^{2i\pi t}) \mid r \in ]u, 1[,\ t \in ]\tau, \tau'[ \right\} .$$

LEMME 2.11. *Tout point $x$ de $\partial B(a)$ dont l'impression $\bigcap_{n \geq 0} P_n(x)$ est réduite à $x$ possède un système fondamental de voisinages connexes dans $\partial B(a)$.*

*Preuve.* Toute pièce de profondeur $n$ rencontre $B(a)$ suivant des secteurs du type $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau')$ car son bord est formé, dans $B(a)$, (de morceaux) de rayons rationnels et de l'équipotentielle de niveau $2^{-1/d^n}$. Par ailleurs, comme $x$ appartient à $P_n(x) \cap \partial B(a)$, il possède un voisinage dans $P_n(x)$ qui rencontre $B(a)$. Ce voisinage rencontre alors un secteur $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau') \subset P_n(x) \cap B(a)$ où $R_a(\tau)$, $R_a(\tau')$ font partie de $\partial P_n(x)$. Ainsi, l'intersection

$$U_n = \bigcap_{u \in ]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau') \subset \bar{P}_n(x)$$

est un voisinage de $x$ dans $\partial B(a)$, compact et connexe (c'est une intersection décroissante de parties compactes connexes). Comme l'intersection des pièces $P_n(x)$ se réduit au point $x$, la suite $U_n$ constitue un système fondamental de voisinages connexes de $x$ dans $\partial B(a)$. □

## 2.5 CAS D'UN BOUT CRITIQUE PÉRIODIQUE

On considère à présent le graphe $\Gamma$ parmi $\Gamma(\theta)$ et $\Gamma(1-\theta)$ qui bague le point critique libre $-a$ (à la profondeur 0 ou 1) et on suppose que le bout de $-a$ est $k$-périodique. D'après le théorème de Yoccoz 1.10, l'application $f^k \colon P_{m+k}(-a) \to P_m(-a)$ est à allure quadratique — pour un entier $m$ assez grand — et son ensemble de Julia rempli $K$ est l'impression $\mathrm{Imp}(-a) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(-a)$. Deux cas se présentent alors. Si $\bar{B}(a)$ n'intersecte pas $K$, la connexité locale de $\partial B(a)$ découle encore une fois du théorème de

Yoccoz 1.10 et du lemme 2.11, car aucun point de $\partial B(a)$ ne tombe dans $K$ par itération et toutes les impressions sont donc réduites à des singletons. Sinon, on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point (lemme 2.13) qui est un point fixe par $f^k$ noté $\beta$. Il en résulte que, si l'orbite d'un point $x \in \partial B(a)$ passe dans $K$, la suite des parties $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ forme, dans $\partial B(a)$, un système fondamental de voisinages de $x$ puisque leur intersection est réduite à une préimage itérée de $\partial B(a) \cap K \subset \{\beta\}$. Le lemme 2.11 permet alors de conclure que $\partial B(a)$ est localement connexe en $x$. Ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Dorénavant, on suppose que $K \cap \partial B(a) \neq \varnothing$ et dans la fin de cet article on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point. Dans un premier temps, on trouve un point répulsif ou parabolique dans $K \cap \partial B(a)$ :

LEMME 2.12. *Il existe dans $B(a)$ un rayon $R_a(\eta)$ qui est $k$-périodique par $f$ et aboutit en un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ — fixe par $f^k$.*

*Preuve.* On reprend les notations données juste avant le lemme 2.11. On montre tout d'abord (par récurrence sur $n$) que, si une pièce $P_n$ de profondeur $n$ rencontre $B(a)$, l'intersection $P_n \cap B(a)$ est formée d'un seul secteur du type $Q(u, \tau, \tau')$, où l'intervalle $]\tau, \tau'[$ du cercle a une longueur strictement inférieure à $1/d^{n+1}$.

Une pièce $P_0$ de profondeur 0 a clairement cette propriété. D'autre part, toute pièce $P_{n+1}$ de profondeur $n+1$ est contenue dans une pièce $P'_n$ de profondeur $n$ et a pour image par $f$ une (autre) pièce $P_n$ de profondeur $n$. Par hypothèse de récurrence, $P_n \cap B(a)$ est du type $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$, avec $|\tau'_n - \tau_n| < 1/d^{n+1}$. L'ouvert $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$ a donc $d$ préimages dans $B(a)$, qui sont de la forme

$$Q\Big(u, \tau + \frac{i}{d}, \tau' + \frac{i}{d}\Big), \qquad 0 \leq i \leq d-1,$$

où $u = u_n^{1/d}$ et $|\tau' - \tau| < 1/d^{n+2}$. L'intersection $P_{n+1} \cap B(a)$ coïncide alors avec l'un de ces secteurs ouverts: elle en contient un tout entier car elle est bordée par des rayons préimages de ceux qui bordent $P_n$ et elle ne peut en contenir deux car deux tels secteurs diffèrent de $1/d$ alors que la pièce $P'_n \supset P_{n+1}$ rencontre $B(a)$ dans un secteur d'ouverture $< 1/d$ (hypothèse de récurrence). On choisit alors $\tau, \tau'$ pour que

$$P_{n+1} \cap B(a) = Q(u, \tau, \tau').$$

Soit maintenant $x$ un point de $K \cap \partial B(a)$. S'il se trouve sur une préimage $\Gamma_n$ du graphe $\Gamma$, c'est immédiatement le point d'aboutissement d'un rayon prépériodique de $B(a)$. En prenant son image par un itéré convenable de $f$, on obtient un rayon périodique qui converge vers un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ fixe par $f^k$. Si $x$ n'est sur aucune préimage du graphe, la pièce $P_n(x)$ rencontre $B(a)$ suivant un secteur de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau_n')$ avec $|\tau_n - \tau_n'| < 1/d^n$. Les angles $(\tau_n)$, $(\tau_n')$ forment des suites adjacentes dont on note $\eta$ la limite commune. Comme $x \in K \subset P_n(-a)$, nécessairement $P_n(x) = P_n(-a)$ et, de ce fait,

$$f^k\big(P_{n+k}(x) \cap B(a)\big) = P_n(x) \cap B(a)$$

pour $n$ assez grand. Par suite, $d^k\eta$ est dans l'intervalle $]\tau_n, \tau_n'[ \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de sorte que $d^k\eta = \eta$. Le rayon d'angle $\eta$ converge alors vers un point $\beta$ (théorème 2.4). Ce point $\beta$ est fixe par $f^k$ et, comme il se trouve dans toutes les pièces $P_n(-a)$, il est dans $K \cap \partial B(a)$. □

LEMME 2.13. *Il existe deux rayons externes $R(\zeta)$, $R(\zeta')$, d'angles $\zeta$, $\zeta'$ rationnels, qui aboutissent au point $\beta$ et sont tels que la courbe de Jordan $R(\zeta) \cup R(\zeta') \cup \{\beta\}$ sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$.*

*Preuve.* Dans la preuve du lemme 2.12, on a vu que $P_n(-a) \cap B(a)$ est de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau_n')$. Les rayons $R_a(\tau_n)$, $R_a(\tau_n')$ convergent vers des points $y_n$, $y_n'$ de $\partial B(a)$ en lesquels aboutissent aussi des rayons externes qui font partie de $\partial P_n(-a)$ et qu'on note respectivement $R(\zeta_n)$, $R(\zeta_n')$. La suite $\zeta_n$ (resp. $\zeta_n'$) est alors croissante majorée (resp. décroissante minorée) et converge donc vers un angle limite $\zeta$ (resp. $\zeta'$). De plus, comme $f^k$ est un homéomorphisme local en les points $y_n$, $y_n'$ et que $f^k\big(\bar{P}_{n+k}(-a)\big) = \bar{P}_n(-a)$ pour $n$ assez grand,

$$f^k\big(R(\zeta_{n+k})\big) = R(\zeta_n), \quad \text{et} \quad f^k\big(R(\zeta_{n+k}')\big) = R(\zeta_n').$$

Il en résulte que $(d+1)^k\zeta_{n+k} = \zeta_n$ (dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$) et, par suite, que $\zeta$ est périodique de période divisant $k$. Les rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent ainsi vers des points $y$, $y'$ qui sont fixes par $f^k$ et qui appartiennent à $K$ — car la partie des rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ située au-delà du potentiel $2^{-1/d^n}$ se trouve dans $\bar{P}_n(-a)$.

D'autre part, le théorème de redressement de A. Douady et J.H. Hubbard [DH2, théorème 1] montre que $f^k$ est conjuguée à un polynôme quadratique $f_c(z) = z^2 + c$ par un homéomorphisme $\sigma$ d'un voisinage de $K$ sur un voisinage de l'ensemble de Julia rempli $K_c$ de $f_c$. Les points $\sigma(\beta)$, $\sigma(y)$ et $\sigma(y')$ sont des points fixes de $f_c$ en lesquels aboutissent des arcs externes fixes par $f_c$ — à savoir $\sigma\big(R_a(\eta)\big)$, $\sigma\big(R(\zeta)\big)$ et $\sigma\big(R(\zeta')\big)$. Or un polynôme quadratique possède au plus deux points fixes parmi lesquels un seul — généralement noté $\beta_c$ — est l'aboutissement d'un arc externe fixe [P, théorème A]. Par suite, $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent nécessairement vers $\beta$.

Finalement, $\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta')$ forme une courbe de Jordan qui sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$. En effet, le losange $V_n$ bordé par $\bar{R}_a(\tau_n)$, $\bar{R}_a(\tau_n')$, $\bar{R}(\zeta_n)$ et $\bar{R}(\zeta_n')$ contient la pièce $P_n(-a)$ par construction. Il contient donc $K$ et, par suite, au moins un point périodique répulsif $p$ (différent de $\beta$) et un rayon externe qui converge vers $p$, de sorte que $\zeta \neq \zeta'$. Ainsi, la composante connexe $U$ de $\mathbf{C} \setminus \left(\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta')\right)$ qui contient $p$ contient $K \setminus \{\beta\}$ — car $K$ ne peut rencontrer la courbe $\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta')$ qu'en $\beta$ et ce point ne disconnecte par $K$ [M, théorème 6.10]. □

## RÉFÉRENCES


[A] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Wadsworth & Brooks/ Cole Advanced Books & Software, Monterey, California, 1987 *).

[B] BÖTTCHER, L. Les lois principales de la convergence des itérés et leur application en analyse (en russe). *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. 14* (1904), 155–234.

[BH] BRANNER, B. and J. H. HUBBARD The iteration of cubic polynomials II, patterns and parapatterns. *Acta Math. 169* (1992), 229–325.

[C] CARATHÉODORY, C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann. 73* (1913), 323–370.

[DH1] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD *Étude dynamique des polynômes complexes.* Publ. math. d'Orsay, 1984.

[DH2] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4) 18* (1985), 287–343.

[F] FATOU, P. Sur les équations fonctionnelles (trois mémoires). *Bull. Soc. Math. France 47* (1919), 161–271, *48* (1920), 33–94 et 208–314.

[Fa] FAUGHT, D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. Thèse de l'Université de Cornell, 1992.

[H] HUBBARD, J. H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. In: *Topological Methods in Modern Mathematics*, L. R. Goldberg and A. V. Phillips eds, 467–511. Publish or Perish, Houston, 1993.

[J] JULIA, G. Mémoire sur l'itération des applications fonctionnelles. *J. Math. Pures Appl. 8* (1918), 47–245.

[M] MCMULLEN, C. *Complex Dynamics and Renormalization.* Annals of Mathematics Studies *135*. Princeton University Press, Princeton, 1994.


*) Réimpression du manuscrit *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.–New York–London, 1966.