Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha

Kapitel: 4.2 Preuve du théorème 1

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64803

4.2 Preuve du théorème 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ sont des sous-espaces propres de $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$ et $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension $n \geq 3$, on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et v une fonction non nulle appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$. On voit aisément que la fonction $f = u \otimes v$ vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

4.3 Contre-exemples explicites

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x,y) = 2x - x\log(x^2+y^2) - 2y\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a $u \in L^\infty_{loc}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\log(x^2+y^2)\,;$$

si on pose $f(x,y) = -\rho(x,y)\log(x^2+y^2)$, il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que f appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Soient

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad w(x,y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\log(x^2+y^2).$$