Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha

Kapitel: 4.4 Les plongements de Sobolev sous-jacents

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64803

Les fonctions v et w appartiennent à L^∞ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w - v\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Un calcul analogue montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Finalement f appartient à $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ mais non à $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Soit g une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} fg = +\infty,$$

par exemple $g(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2)\log^2(x^2+y^2)}$. Si l'on avait $g \in W^{-1}(W^1(L^1))$, la proposition 4 et le théorème 2 nous donneraient

$$|\langle g, \varphi_k * f\rangle| \leq \|\varphi_k * f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))}\|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))},$$

d'où

$$\int g\,(\varphi_k * f) \leq \|f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))}\|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))};$$

puisque $\varphi_k * f$ tend vers f presque partout, le lemme de Fatou nous conduirait à:

$$\int fg < +\infty,$$

ce qui contredit le choix de g.

4.4 Les plongements de Sobolev sous-jacents

La non-inclusion $L^1(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$ peut s'interpréter de manière fort élémentaire en la factorisant à travers des plongements de Sobolev. On commence par observer que

$$W^1(L^1(\mathbf{R}^2)) \subset L^2(\mathbf{R}^2) \tag{7}$$

(ceci parce que $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; voir par exemple [7], chapitre 5, théorème 2). On dispose en fait d'un plongement de Sobolev un peu plus général que (7), à savoir:

$$BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2);$$

$BV(\mathbf{R}^2)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont des mesures bornées sur $\mathbf{R}^2$. Dès lors l'inclusion

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$$

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)\,,$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2)\,;$$

or $W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)$ est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans $BMO(\mathbf{R}^2)$ et non dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

5. Pour aller plus loin

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{R}^n)$ et son dual $BMO(\mathbf{R}^n)$ sont considérés comme des substituts naturels de $L^1(\mathbf{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. $BMO(\mathbf{R}^n)$ n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations $h^1(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n)$ et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel ; on a en effet $h^1(\mathbf{R}^n) = F^0_{12}(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n) = F^0_{\infty 2}(\mathbf{R}^n)$ (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les F^s_{pq}, on obtient $W^m(E) = (I-\Delta)^{-m/2}(E)$ pour $E = h^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = bmo(\mathbf{R}^n)$, de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

THÉORÈME 4. *Pour $n > 1$, on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1\big(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))\big) \subset bmo(\mathbf{R}^n)\,,$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))\big) \subset L^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

et ces quatre inclusions sont strictes.

Preuve. Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que $h^1(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace propre de $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$. Quelques rappels sur h^1 seront