

## 2.3 DISCRETE GHYS THEOREM

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REMARK 2.8. On interchanging sides and vertices, and replacing circumscribed conics by inscribed ones, we arrive at a “dual” theorem. The latter is equivalent to Theorem 2.6 via projective duality – cf. Remark 2.4.

### 2.3 DISCRETE GHYS THEOREM

A discrete object of study in this section is a pair of cyclically ordered  $n$ -tuples  $X = (x_1, \dots, x_n)$  and  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  in  $\mathbf{RP}^1$  with  $n \geq 4$ . We choose an orientation of  $\mathbf{RP}^1$  and assume that the cyclic ordering of each of the two  $n$ -tuples is induced by this orientation.

Recall that an ordered quadruple of distinct points in  $\mathbf{RP}^1$  determines a number, the *cross-ratio*, which is a projective invariant. Choosing an affine parameter such that the points are given by real numbers  $a < b < c < d$ , the cross-ratio is

$$(2.1) \quad [a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(b-a)(d-c)}.$$

DEFINITION 2.9. A triple of consecutive indices  $(i, i+1, i+2)$  is said to be *extremal* if the difference of cross-ratios

$$(2.2) \quad [y_j, y_{j+1}, y_{j+2}, y_{j+3}] - [x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$$

changes sign as  $j$  varies from  $i-1$  to  $i$  (this does not exclude the case where either of the differences vanishes).

THEOREM 2.10. For every pair  $X, Y$  of  $n$ -tuples of points as above, there exist at least four extremal triples.

EXAMPLE 2.11. If  $n = 4$  then the theorem holds for a very simple reason. A cyclic permutation of four points induces the following transformation of their cross-ratio:

$$(2.3) \quad [x_4, x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2, x_3, x_4]}{[x_1, x_2, x_3, x_4] - 1},$$

and this is an involution. Furthermore, if  $a > b > 1$  then  $a/(a-1) < b/(b-1)$ . Therefore, each triple of indices is extremal.

Let us interpret Theorem 2.10 in geometrical terms like Theorems 2.2 and 2.6. There exists a unique projective transformation that carries  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  into  $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}$ , respectively. The graph  $G$  of this transformation can be seen as a curve in  $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ ; the three points  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$  lie

on this graph. An ordered pair of points  $(x_j, x_{j+1})$  in oriented  $\mathbf{RP}^1$  defines a unique segment. An ordered pair of points  $((x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}))$  in  $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$  also defines a unique segment, namely the one whose projection on each factor is a segment in  $\mathbf{RP}^1$  as defined before. The triple  $(i, i+1, i+2)$  is extremal if and only if the topological intersection index of the broken line  $(x_{i-1}, y_{i-1}), \dots, (x_{i+3}, y_{i+3})$  with the graph  $G$  is zero. This fact can be checked from (2.1) by a direct computation, which we omit.

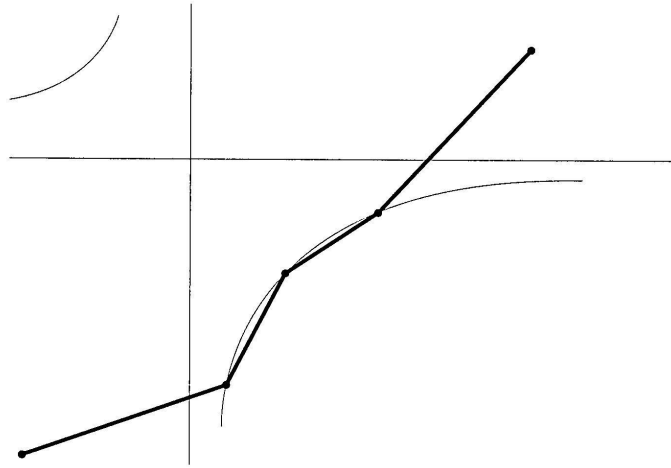


FIGURE 2

Let us also comment on the relation between Definition 2.9 and the zeroes of the Schwarzian derivative of a diffeomorphism of the projective line. Let

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \varepsilon, \quad x_2 = 2\varepsilon, \quad x_3 = 3\varepsilon$$

be four infinitely close points given in some affine coordinate, and let  $y_i = f(x_i)$  where  $f$  is a diffeomorphism of  $\mathbf{RP}^1$ . Then a direct computation using (2.1) yields:

$$[y_0, y_1, y_2, y_3] - [x_0, x_1, x_2, x_3] = \varepsilon^2 S(f)(0) + O(\varepsilon^3),$$

where

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$$

is the Schwarzian derivative of  $f$ . Thus, for  $\varepsilon \rightarrow 0$ , Definition 2.9 corresponds to the vanishing of the Schwarzian derivative.