

# 6.1 SHIFTS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6.1 SHIFTS

As before, let  $X = G/K$  and  $Y = G/H$  be two homogeneous spaces, with  $K$  compact, and

$$Ru(g \cdot y_o) = \int_H u(gh \cdot x_o) dh$$

be the corresponding Radon transform of  $u \in C_c(X)$ .

Let  $t \in G$  be a "shift", fixed at first. Replacing the origin  $y_o = H$  in  $Y$  by the shifted origin  $y_t = t \cdot y_o$ , with stabilizer subgroup  $H_t = tHt^{-1} \subset G$ , we obtain the new identification  $Y = G/H_t$ , and a new incidence relation between  $X$  and  $Y$ . A point  $x = g \cdot x_o \in X$  is now incident to  $y \in Y$  if and only if there exists  $\gamma \in G$  such that

$$x = \gamma \cdot x_o \quad \text{and} \quad y = \gamma \cdot y_t = \gamma t \cdot y_o,$$

i.e.

$$y = gkt \cdot y_o,$$

for some  $k \in K$ . The corresponding *shifted dual transform* of  $v \in C(Y)$  is

$$R_t^* v(g \cdot x_o) = \int_K v(gkt \cdot y_o) dk.$$

REMARK. We now have two double fibrations

$$\begin{array}{ccc} Z = G/(K \cap H) & & Z_t = G/(K \cap H_t) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\ X = G/K & & Y = G/H, & & X = G/K & & Y = G/H_t, \end{array}$$

and we are dealing with the Radon transform  $R$  given by the first and the dual transform  $R_t^*$  given by the second. The transform  $R_t$  associated with the second diagram is

$$R_t u(g \cdot y_o) = \int_H u(ght^{-1} \cdot x_o) dh;$$

but, excepting the proof of Proposition 12, it will not be used in the sequel.

LEMMA 11. Let  $u \in C_c(X)$  and  $g, t \in G$ . Then

$$(R_t^* Ru)(g \cdot x_o) = (Ru_g)(t \cdot y_o),$$

where  $u_g$  is the  $K$ -invariant function on  $X$  defined by

$$u_g(x) = \int_K u(gk \cdot x) dk.$$

*Proof.* Immediate, since

$$(R_t^* Ru)(g \cdot x_o) = \int_{K \times H} u(gkth \cdot x_o) dk dh = \int_H u_g(th \cdot x_o) dh. \quad \square$$

Before proceeding we mention the following extension of Proposition 3 to shifted transforms. This result will not be used in the sequel.

PROPOSITION 12. *Let  $G$  and  $H$  be unimodular,  $K$  compact,  $X = G/K$  and  $Y = G/H$ . For any  $u \in C_c(X)$  and  $t \in G$  we have*

$$R_t^* Ru = u * S_t$$

(convolution on  $X$ ). Here  $S_t$  is the  $K$ -invariant distribution on  $X$  defined by  $S = R_t^* R \delta$ , and  $\delta$  is the Dirac distribution at the origin  $x_o = K$  of  $X$ , i.e.

$$\langle S_t, u \rangle = R^* R_t u(x_o) = \int_{K \times H} u(kht^{-1} \cdot x_o) dk dh.$$

*Proof.* The proof of Proposition 3 can be repeated here, with  $R^* R_t$  as the dual of  $R_t^* R$ . The claim can also be checked directly, writing, for  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ ,

$$\langle R_t^* Ru, \varphi \rangle = \int_{G \times H} u(gth \cdot x_o) \varphi(g \cdot x_o) dg dh,$$

and changing variables into  $h' = h^{-1}$ ,  $g' = gth$ ; the result follows easily,  $G$  and  $H$  being unimodular groups. Details are left to the reader.  $\square$

## 6.2 RADON INVERSION BY SHIFTS

The elementary Lemma 11 can be used in the following way. Assume the transform  $R$  can be inverted at the origin for  $K$ -invariant functions on  $X$ , say

$$(13) \quad u(x_o) = \langle T_{(y)}, Ru(y) \rangle,$$

where  $T$  is some linear form on a space of functions on  $Y$ . Then, replacing  $u$  by the  $K$ -invariant function  $u_g$  in the lemma, we obtain

$$u(g \cdot x_o) = u_g(x_o) = \langle T, Ru_g \rangle.$$

The roles of  $g$  and  $t$  can now be interchanged by Lemma 11, whence

$$(14) \quad u(x) = \langle T_{(t)}, R_t^* Ru(x) \rangle,$$

for arbitrary  $u \in \mathcal{D}(X)$  and  $x \in X$ . The notation  $T_{(t)}$  means that  $T$  now acts on the shift variable  $t$ , or  $t \cdot y_o$  to be precise. Since  $R_{kth}^* Ru(x) = R_t^* Ru(x)$  for  $k \in K$  and  $h \in H$ , this variable may actually be taken in  $K \backslash G/H$ .