1. Préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Cet énoncé de linéarisation se généralise bien aux courbes entières de $(\mathbf{C}^*)^k$. En particulier, toute courbe entière non constante dans $(\mathbf{C}^*)^2$ possède une limite (au sens de limite d'une suite de courbes construites en reparamétrant la courbe initiale) qui est feuille d'un feuilletage linéaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Le cas du complémentaire d'une courbe C à trois composantes en découle de la manière suivante: notons d'abord que $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ est un revêtement ramifié de $(\mathbf{C}^*)^2$ du fait des trois composantes de C. L'idée est maintenant de remplacer une courbe entière non constante dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ par une de ses limites feuille d'un feuilletage holomorphe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Ce feuilletage s'obtient par ce qui précède comme l'image réciproque par le revêtement ramifié d'un feuilletage linéaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On montre ensuite que cette feuille limite doit être algébrique en analysant l'intersection d'une feuille transcendante du feuilletage avec le lieu de ramification du revêtement. Elle est donc tracée sur une courbe rationnelle ne coupant C qu'en deux points. C'est une situation non générique. $\square$

Voici le plan de ce texte: après des préliminaires sur l'hyperbolicité, le second paragraphe traite du théorème de Green tandis que la linéarisation des courbes entières de $(\mathbf{C}^*)^k$ fait l'objet du troisième. Le quatrième paragraphe est consacré au complémentaire des courbes à trois composantes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Enfin un appendice explicite les courbes de Brody dans $(\mathbf{C}^*)^k$, apportant un autre éclairage sur l'énoncé de linéarisation.

1. PRÉLIMINAIRES

Notre référence générale pour l'hyperbolicité est la monographie [9].

DÉFINITION. Soit X une variété complexe. Une partie A de X est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière non constante: il n'existe pas d'application holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ dans X d'image contenue dans A.

Les premiers exemples proviennent du théorème de Liouville:

EXEMPLE. Le complémentaire d'un voisinage d'une hypersurface projective de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est hyperbolique.

En effet un plongement de Veronese envoie ce complémentaire dans un borné de $\mathbf{C}^N$. Ainsi l'adhérence de toute courbe entière non constante de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ coupe toute hypersurface projective.

On produit d'autres exemples par la propriété suivante qui résulte du relèvement des homotopies pour un revêtement:

INVARIANCE PAR REVÊTEMENT. *Soient X une variété complexe et Y un revêtement non ramifié de X. Alors X est hyperbolique si et seulement si Y l'est.*

On obtient ainsi l'hyperbolicité des surfaces de Riemann hyperboliques au sens traditionnel, i.e. celles dont le revêtement universel est le disque unité D.

L'outil de base de ce qui va suivre est le lemme de reparamétrisation suivant, dû à Zalcman [12] pour $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et à Brody [3] en général (voir aussi [9], chap. 3).

LEMME. *Soient X une variété compacte complexe (munie d'une métrique hermitienne) et (f_n) une suite d'applications holomorphes du disque unité dans X. On suppose que $\|f_n'(0)\|$ tend vers l'infini. Alors il existe une suite de reparamétrages (r_n) de $\mathbf{C}$ convergeant vers 0 pour laquelle $f_n \circ r_n$ tend (uniformément sur les compacts) vers une application entière non constante ϕ de $\mathbf{C}$ dans X après extraction d'une sous-suite.*

De plus ϕ est à dérivée bornée.

REMARQUE. Dans le contexte, ce lemme fait habituellement le lien entre hyperbolicité et hyperbolicité au sens de Kobayashi, i.e. la non dégénérescence de la pseudométrique donnée par

$$K(x,v) = \inf\{1/r,\ r>0 \mid \exists f\colon D \to \mathbf{C} \text{ holomorphe avec } f(0)=x,\ f'(0)=rv\},$$

où x est un point de X et v un vecteur tangent. Les complémentaires dans ce texte seront ainsi hyperboliques complets et plongés hyperboliquement au sens de Kobayashi (cf. [9]).

CONSÉQUENCE. *Soient X une variété compacte complexe et $f_n\colon \mathbf{C} \to X$ une suite de courbes entières non constantes. Il existe une suite de reparamétrages (r_n) à la source telle que $f_n \circ r_n$ converge vers une courbe entière non constante après extraction.*

En voici une traduction directe :

OUVERTURE. *Soit X une variété compacte complexe et F un fermé hyperbolique dans X. Alors F possède un voisinage hyperbolique.*

Sinon on créerait, à partir d'une base dénombrable de voisinages non hyperboliques de F, une suite de courbes entières non constantes convergeant, après extraction et reparamétrage, vers une courbe entière non constante contenue dans F.

2. LE THÉORÈME DE GREEN

Voici comment on peut adapter l'argument de Ros pour montrer la généralisation suivante du théorème de Picard (due à Green [8]) :

THÉORÈME. *L'espace projectif $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $2k+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique.*

Ici, « être en position générale » signifie que $k+1$ de ces hyperplans n'ont pas d'intersection commune.

Démonstration. Plongeons $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ en envoyant les hyperplans évités d'équation $\{l_i = 0\}$ dans les hyperplans de coordonnées de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ par

$$\phi = [l_1 : \ldots : l_{2k+1}]$$

d'image notée P. Si A est une partie de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$, on notera A^* le complémentaire dans A des hyperplans de coordonnées. On veut donc montrer l'hyperbolicité de P^*.

Par position générale, P évite un voisinage des points de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ ayant $k+1$ coordonnées nulles. Autrement dit, P est contenu dans

$$X_\epsilon = \{z,\ |z_i| \geq \epsilon \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

où $\|z\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_{2k+1}|\}$ et ϵ est assez petit.

Il suffit donc de voir l'hyperbolicité de X_ϵ^*. Mais la puissance n-ième $(z \mapsto z^n)$ induit un revêtement non ramifié de $X_{\epsilon^{1/n}}^*$ sur X_ϵ^* et $X_{\epsilon^{1/n}}$ converge vers X_1 en distance de Hausdorff.