

## 2. Le théorème de Green

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En voici une traduction directe :

**OUVERTURE.** *Soit  $X$  une variété compacte complexe et  $F$  un fermé hyperbolique dans  $X$ . Alors  $F$  possède un voisinage hyperbolique.*

Sinon on créerait, à partir d'une base dénombrable de voisinages non hyperboliques de  $F$ , une suite de courbes entières non constantes convergeant, après extraction et reparamétrage, vers une courbe entière non constante contenue dans  $F$ .

## 2. LE THÉORÈME DE GREEN

Voici comment on peut adapter l'argument de Ros pour montrer la généralisation suivante du théorème de Picard (due à Green [8]) :

**THÉORÈME.** *L'espace projectif  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $2k + 1$  hyperplans en position générale est hyperbolique.*

Ici, « être en position générale » signifie que  $k + 1$  de ces hyperplans n'ont pas d'intersection commune.

*Démonstration.* Plongeons  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  en envoyant les hyperplans évités d'équation  $\{l_i = 0\}$  dans les hyperplans de coordonnées de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  par

$$\phi = [l_1 : \dots : l_{2k+1}]$$

d'image notée  $P$ . Si  $A$  est une partie de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ , on notera  $A^*$  le complémentaire dans  $A$  des hyperplans de coordonnées. On veut donc montrer l'hyperbolicité de  $P^*$ .

Par position générale,  $P$  évite un voisinage des points de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  ayant  $k + 1$  coordonnées nulles. Autrement dit,  $P$  est contenu dans

$$X_\epsilon = \{z, |z_i| \geq \epsilon \|z\| \text{ pour au moins } k + 1 \text{ coordonnées}\}$$

où  $\|z\| = \max\{|z_1|, \dots, |z_{2k+1}|\}$  et  $\epsilon$  est assez petit.

Il suffit donc de voir l'hyperbolicité de  $X_\epsilon^*$ . Mais la puissance  $n$ -ième ( $z \mapsto z^n$ ) induit un revêtement non ramifié de  $X_{\epsilon^{1/n}}^*$  sur  $X_\epsilon^*$  et  $X_{\epsilon^{1/n}}$  converge vers  $X_1$  en distance de Hausdorff.

Comme l'hyperbolicité est une propriété ouverte et stable par revêtement (cf. § 1), tout se réduit à montrer le

LEMME. *Le polyèdre*

$$X_1 = \{z, |z_i| = \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

*est hyperbolique.*

*Démonstration.* Soit  $f$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  une courbe entière contenue dans  $X_1$ . Elle doit « passer du temps » dans une de ses faces  $X_I = \{z, |z_i| = \|z\|, i \in I\}$  où  $I$  est une partie de  $\{1, \dots, 2k+1\}$  de cardinal  $k+1$ . Par exemple, on peut supposer  $f^{-1}(X_{\{1, \dots, k+1\}})$  d'intérieur non vide. Autrement dit, si  $f = [f_1 : \dots : f_{2k+1}]$ , on aura par prolongement analytique  $|f_1| \equiv \dots \equiv |f_{k+1}|$  sur tout  $\mathbf{C}$ . Comme l'image de  $f$  est contenue dans  $X_1$  et que toute partie de  $\{1, \dots, 2k+1\}$  de cardinal  $k+1$  rencontre  $\{1, \dots, k+1\}$ , il s'ensuit que  $\|f\| \equiv |f_1|$  sur tout  $\mathbf{C}$ . Donc, pour tout  $i$ ,  $|f_i|/|f_1|$  est bornée par 1 sur  $\mathbf{C}$  et  $f$  est constante par le théorème de Liouville.  $\square$

REMARQUE. La même démonstration s'applique au résultat de Babets [1] sur l'hyperbolicité de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $2k+1$  hypersurfaces en position générale.

### 3. LINÉARISATION DES COURBES ENTIÈRES DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

On décrit dans ce paragraphe les limites les plus simples des courbes entières dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $k+1$  hyperplans en position générale, donc dans  $(\mathbf{C}^*)^k$ .

DÉFINITION. Soit  $f$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  une courbe entière non constante. Une *limite* de  $f$  est une courbe entière non constante  $g$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  obtenue comme limite (uniforme sur les compacts de  $\mathbf{C}$ ) de  $(f \circ r_n)$  où  $(r_n)$  est une suite de reparamétrages à la source.

Les propriétés suivantes se vérifient facilement :

- a) une limite d'une limite  $g$  de  $f$  en est encore une pour  $f$  ;
- b) si une courbe entière évite une hypersurface dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , ses limites évitent encore cette hypersurface ou y sont contenues.