5. Appendice. Courbes de Brody dans $(C^*)^k$

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

REMARQUE. On construit facilement des exemples de courbes C à trois composantes de degré 5 dont le complémentaire n'est pas hyperbolique à cause d'une droite ne coupant C qu'en 2 points. En voici deux, présentés en coordonnées affines, où l'obstruction Γ est une conique ou une cubique rationnelle ne rencontrant C qu'en 2 points.

a) C est l'union des deux paraboles d'équation $(\pm 2x = y^2 - 2)$ et de l'axe des x. Le cercle Γ d'équation $(x^2 + y^2 = 1)$ a des contacts d'ordre 4 avec les paraboles en leurs sommets situés sur l'axe des x.

b) C est l'union de la cubique d'équation $(y^3 = x^3 + x)$, de l'axe des x et de la droite à l'infini. La cubique rationnelle Γ d'équation $(x = y^3)$ a son point de rebroussement à l'infini au point de rencontre des deux droites et un contact d'ordre 9 avec la cubique de C en l'origine, également sur l'axe des x.

5. APPENDICE. COURBES DE BRODY DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

Le théorème du paragraphe 3 est aussi conséquence de la description des courbes de Brody dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Une courbe entière $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est dite *de Brody* si $\|f'\| \leq 1$, la dérivée étant mesurée dans les métriques usuelles de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$.

Toute courbe entière possède une limite de Brody, précisément par le lemme de Brody (cf. § 1). Celles contenues dans $(\mathbf{C}^*)^k$ sont très simples:

THÉORÈME. *Les seules courbes de Brody $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ évitant les hyperplans de coordonnées sont de la forme*

$$f(z) = [ce^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \qquad c_i, \alpha_i \textit{ dans } \mathbf{C}\,.$$

Démonstration. Écrivons $f = e^{\phi}$ dans une carte de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, par exemple $(z_{k+1} = 1)$.

La première étape, classique (voir [5]), montre que les composantes de ϕ sont quadratiques. L'argument remonte aux origines de la théorie de Nevanlinna. La propriété d'être de Brody pour f se traduit directement par la surharmonicité de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2) - |z|^2$. Les moyennes de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2)$ sur les cercles de centre 0 et de rayon r

croissent ainsi au plus quadratiquement en r. Il en est de même pour celles de $\mathrm{Log}(1+|f_j|^2)$, donc de $\mathrm{Log}(|f_j|+|f_j|^{-1})$ puisque $\mathrm{Log}\,|f_j| = \mathrm{Re}(\phi_j)$ est harmonique. Or le développement en série entière de ϕ_j donne :

$$\pi r^n \, \phi_j^{(n)}(0) = n! \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, \phi_j(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta \,,$$

d'où

$$\pi r^n \left|\phi_j^{(n)}(0)\right| \leq n! \int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Log}\,|f_j(re^{i\theta})|\right| d\theta \leq n! \int_0^{2\pi} (\mathrm{Log}(|f_j|+|f_j|^{-1}))(re^{i\theta}) \, d\theta \,.$$

En faisant croître indéfiniment r, on en déduit que $\phi_j^{(n)}(0) = 0$ pour $n \geq 3$. Les composantes de ϕ sont bien quadratiques.

La deuxième étape consiste à voir que les composantes de ϕ sont en fait affines. Pour cela, revenons aux coordonnées homogènes :

$$f = [e^{\phi_1} : \ldots : e^{\phi_{k+1}}] \text{ avec } \deg(\phi_i) \leq 2 \,.$$

Il s'agit de montrer que $\phi_i - \phi_j$ est affine pour toute paire d'indices. Convenons que i équivaut à j si c'est le cas pour la paire $\{i,j\}$. La remarque cruciale est la suivante :

Soit $Y_{ij} = \{z \mid |z_i| = |z_j| \geq |z_l| \text{ pour tout } l\}$ (cf. §3). Si $f^{-1}(Y_{ij})$ n'est pas compact, alors i équivaut à j.

En effet, on peut alors trouver a_n tendant vers l'infini avec $f(a_n)$ tendant vers b dans Y_{ij}. Quitte à extraire, on peut supposer la suite $(f(z+a_n))$ localement uniformément convergente par le théorème d'Ascoli puisque la dérivée de f est uniformément bornée. Il en est de même pour la suite des dérivées en 0 de la i-ième composante de $(f(z+a_n))$ dans la carte $(z_j = 1)$, donc

$$(f_i/f_j)'(a_n) = (\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n))((f_i/f_j)(a_n))$$

converge.

Or $(f_i/f_j)(a_n)$ tend vers $b_i/b_j \neq 0$. Ainsi $\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)$ doit converger alors que $\phi_i' - \phi_j'$ est affine et que a_n tend vers l'infini. Ceci force $\phi_i' - \phi_j'$ à être constant et i équivaut à j.

Cette remarque permet de conclure : en effet, elle entraîne que le maximum des modules des composantes de f est réalisé par des composantes d'indices équivalents (par exemple à 1) hors d'un compact de $\mathbf{C}$. On aura ainsi, pour tout i :

$$\mathrm{Re}(\phi_i)(z) \leq \mathrm{Re}(\phi_1)(z) + O(|z|) \,.$$

Donc $\phi_i - \phi_1$ est affine pour tout i. $\square$