

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV  
**Kapitel:** 3. Représentations, cohomologie et fonctions (conditionnellement) de type positif  
**Autor:** Louvet, Nicolas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. REPRÉSENTATIONS, COHOMOLOGIE ET FONCTIONS (CONDITIONNELLEMENT) DE TYPE POSITIF

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

#### 3.1 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET FACTORIELLES

Pour un ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'opérateurs sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , on note  $\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in \mathcal{S}\}$  le *commutant* de  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible du groupe  $G$  sur l'espace  $\mathcal{H}$ . Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de  $\pi$  signifie que le commutant  $\pi(G)'$  de l'ensemble  $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$  est réduit aux opérateurs scalaires. Comme  $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$ , on a  $\mathcal{N}'_\pi \subset \pi(G)'$ . Ainsi, le centre  $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}'_\pi$  de l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{N}_\pi$  est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur  $\mathcal{H}$ . Ceci montre qu'une représentation irréductible  $\pi$  est factorielle.

#### 3.2 FONCTIONS DE TYPE POSITIF

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact  $G$  une fonction continue  $\varphi$  sur  $G$  à valeurs complexes telle que, pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$ , la matrice  $(\varphi(g_j^{-1}g_i))_{1 \leq i, j \leq n}$  est hermitienne positive: pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$  et pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ , on a

$$\sum_{i, j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \varphi(g_j^{-1}g_i) \geq 0.$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si  $\varphi$  est une fonction de type positif alors, pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$  et  $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$  où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $G$ . On note  $E_0(G)$  l'ensemble des fonctions de type positif  $\varphi$  sur  $G$  telle que  $\varphi(e) \leq 1$ . C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace  $L^\infty(G)$  des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur  $G$ .

Sur  $L^\infty(G)$ , on considère les deux topologies suivantes: d'une part, la topologie  $*$ -faible ou topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  donnée par les semi-normes

$$p_f: L^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+ : \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où  $f \in L^1(G)$  et  $\langle \varphi, f \rangle = \int_G \varphi(g)f(g) dg$ ; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction  $\varphi$  est donné par les ensembles

$$\mathcal{W}(\varphi; \varepsilon, K) = \left\{ \psi \in L^\infty(G) : \sup_{g \in K} |\varphi(g) - \psi(g)| < \varepsilon \right\}$$

où  $\varepsilon$  est un nombre strictement positif et  $K$  une partie compacte du groupe  $G$ .

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie  $*$ -faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions  $f_n$  sur le groupe additif  $\mathbf{R}$  qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur  $]-\infty, 0]$  et 1 sur  $[\frac{1}{n}, +\infty[$ . Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de  $]0, +\infty[$  alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble  $E_0(G)$  est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie  $*$ -faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore  $G = S^1$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , le caractère

$$\chi_n: S^1 \longrightarrow \mathbf{C}: z \longmapsto z^{-n}$$

pour  $z = e^{2\pi i t} \in S^1$ . Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie  $*$ -faible: pour  $f \in L^1(S^1)$ ,  $\langle \chi_n, f \rangle$  coïncide avec le coefficient de Fourier  $\widehat{f}(n)$  de  $f$  au point  $n$  qui tend vers zéro pour  $n$  tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de  $(\chi_n)$  ne peut converger uniformément vers zéro car  $\sup_{z \in S^1} |\chi_n(z)| = 1$ .

On note  $E(G)$  l'ensemble des états de  $G$ : il s'agit des fonctions  $\varphi$  de type positif sur  $G$  pour lesquelles  $\varphi(e) = 1$ . Raikov a montré que, sur  $E(G)$ , les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie  $*$ -faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe  $S^1$  mais leur limite pour la topologie  $*$ -faible vaut zéro au neutre.

Si  $\text{ex } E_0(G)$  désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe  $E_0(G)$ , on note  $P(G) = (\text{ex } E_0(G)) \setminus \{0\}$  et on observe que  $P(G) \subset E(G)$ . Les éléments de  $P(G)$  s'appellent les états purs. Comme  $E_0(G)$  est convexe et compact pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , le théorème de Krein-Milman nous dit que  $E_0(G)$  est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier,  $P(G)$  est non vide.

### 3.3 CONSTRUCTION GNS

Si  $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  est une représentation unitaire de  $G$  et  $\xi \in \mathcal{H}$ , alors la fonction  $\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi | \xi \rangle$  est une fonction de type positif sur  $G$  telle que  $\varphi(e) = \|\xi\|^2$ . Une telle fonction est dite associée à la représentation  $\pi$ . Réciproquement, pour toute fonction  $\varphi$  non-nulle de type positif, il existe un triple  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$  où  $\pi_\varphi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$  est une représentation unitaire de  $G$

et  $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$  est un vecteur de norme  $\sqrt{\varphi(e)}$  tels que l'orbite de  $\xi_\varphi$  sous l'action de  $\pi_\varphi(G)$  est totale dans  $\mathcal{H}_\varphi$  et, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g) \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle.$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à  $\varphi$ . Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si  $V$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  de support fini alors  $\mathcal{H}_\varphi$  est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant  $V$  pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x) \overline{h(y)} \varphi(y^{-1}x).$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

- (1) si  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  sont trois fonctions de type positif telles que  $\psi = \varphi + \chi$  alors la représentation  $\pi_\varphi$  est une sous-représentation de  $\pi_\psi$  ;
- (2) la fonction de type positif  $\varphi$  est pure si et seulement si la représentation  $\pi_\varphi$  est irréductible ;
- (3) si  $\varphi \equiv 1$  alors  $\pi_\varphi = 1_G$  ;
- (4) si  $\varphi$  est une fonction de type positif associée à une représentation  $\pi$  alors la représentation  $\pi_\varphi$  qu'on associe à  $\varphi$  par construction GNS est une sous-représentation de  $\pi$ .

### 3.4 TOPOLOGIE SUR LE DUAL

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble  $\text{Rep}(G)$  des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact  $G$ . Cette topologie est définie comme ceci. Soient  $\pi$  une représentation,  $\varepsilon > 0$ ,  $K$  un ensemble compact de  $G$ , et  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  des fonctions de type positif associées à  $\pi$ . On note  $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  l'ensemble des représentations  $\rho \in \mathcal{S}$  pour lesquelles il existe des fonctions  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à  $\rho$ , telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall x \in K.$$

Les sous-ensembles du type  $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  forment un système fondamental de voisinages de la représentation  $\pi$  dans  $\text{Rep}(G)$  (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation  $\pi$  est *faiblement contenue* dans un ensemble  $\mathcal{S}$  de représentations de  $G$  si toute fonction de type positif associée à  $\pi$  est limite,

pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de  $\mathcal{S}$ . Avec ces définitions, une suite (généralisée)  $\pi_n$  de représentations unitaires de  $G$  converge vers  $\pi$  si et seulement si, pour toute sous-suite infinie  $\pi_{n'}$  de  $\pi_n$ ,  $\pi$  est faiblement contenue dans  $\{\pi_{n'}\}$ .

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur  $\widehat{G}$  n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante,  $P(G)$  étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si  $\pi$  est une représentation irréductible et  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble de  $\widehat{G}$ , alors  $\pi$  est faiblement contenue dans  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\pi$  est dans l'adhérence de  $\mathcal{S}$  pour la topologie de Fell.

### 3.5 COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES

Une *action par isométries affines* du groupe  $G$  sur un espace de Hilbert affine  $\mathcal{H}$  est un morphisme  $\alpha$  de  $G$  dans le groupe  $\mathcal{I}so(\mathcal{H})$  des isométries affines de  $\mathcal{H}$  tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}: (g, \xi) \longmapsto \alpha(g)\xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine  $\mathcal{H}$  à l'espace de Hilbert de ses translations. Si  $\alpha$  est une action par isométries affines alors, pour tout  $g$  dans  $G$  et tout élément  $\xi$  de  $\mathcal{H}$ , on peut écrire

$$\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$$

où  $\pi(g)$  est un opérateur linéaire unitaire et  $b(g) \in \mathcal{H}$ . En imposant la continuité et la condition de morphisme pour  $\alpha$ , on trouve d'une part que  $\pi$  est une représentation unitaire de  $G$  sur  $\mathcal{H}$ , appelée partie linéaire de  $\alpha$ , et d'autre part que  $b$  est une application continue de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)b(y) \quad \text{pour tous } x, y \in G.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}$  et d'une application continue  $b$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  vérifiant la condition de cocycle par rapport à  $\pi$  définit une action par isométries affines  $\alpha$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}$ , par la formule  $\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$ .

Pour  $\alpha$ ,  $\pi$  et  $\beta$  comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

- (i)  $\alpha$  possède un point fixe;
- (ii)  $\alpha$  possède une orbite bornée;
- (iii) toute orbite de  $\alpha$  est bornée;
- (iv) le cocycle  $b$  associé à  $\alpha$  est borné;
- (v) le cocycle  $b$  associé à  $\alpha$  est un cobord.

### 3.6 FONCTIONS CONDITIONNELLEMENT DE TYPE POSITIF

Si  $b: G \rightarrow \mathcal{H}$  est un cocycle continu pour la représentation  $\pi$  alors la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \quad \text{pour tout } g \in G,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$ , pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , on a

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_j \lambda_i \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0.$$

La fonction  $\psi$  est normalisée ( $\psi(e) = 0$ ) et symétrique ( $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ ). Réciproquement, à une telle fonction continue  $\psi$ , on associe le triple GNS  $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$  où  $\pi_\psi$  est une représentation orthogonale de  $G$  dans l'espace de Hilbert réel  $\mathcal{H}_\psi$  et  $b_\psi$  est un cocycle à coefficients dans  $\mathcal{H}_\psi$  tel que, d'une part, le sous-espace engendré par  $b_\psi(G)$  est dense dans  $\mathcal{H}_\psi$ , et d'autre part, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2} \|b_\psi(g)\|^2.$$

Pour rappel, si  $V$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f: \cdot G \rightarrow \mathbf{R}$  de support fini et telles que  $\sum_{x \in G} f(x) = 0$  alors  $\mathcal{H}_\psi$  est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant  $V$  pour la forme bilinéaire

$$\langle f | h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x) h(y) \psi(y^{-1}x)$$

et  $b_\psi$  applique  $g \in G$  sur la classe dans  $\mathcal{H}_\psi$  de la différence des fonctions caractéristique de  $g$  et  $e$ . La représentation  $\pi_\psi$  est déduite de l'action par multiplication à gauche de  $G$  sur  $V$ .

Soit  $\pi$  une représentation,  $b$  un 1-cocycle à coefficients dans  $\pi$  et  $\psi = -\|b\|^2$  la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On

note  $\bar{\pi}$  la représentation conjuguée de  $\pi$  dans l'espace de Hilbert conjugué  $\bar{\mathcal{H}}$  et  $\bar{b}$  le 1-cocycle à coefficients dans  $\bar{\pi}$  correspondant à  $b$ . On peut alors réaliser  $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$  de la façon suivante: le cocycle  $b_\psi$  est donné par  $b_\psi(g) = b(g) + \bar{b}(g)$ , l'espace  $\mathcal{H}_\psi$  est le sous-espace réel fermé de  $\mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$  engendré par  $b_\psi(G)$ , et  $\pi_\psi$  est la sous-représentation de  $\pi \oplus \bar{\pi}$  obtenue en restreignant l'action de  $\pi \oplus \bar{\pi}$  au sous-espace réel invariant  $\mathcal{H}_\psi$  (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous  $x, g \in G$ , on a l'égalité

$$(3.1) \quad \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x).$$

#### 4. PREUVE DU THÉORÈME

Soient  $\pi$  une représentation factorielle du groupe  $G$  telle que

$$H^1(G, \pi) \neq 0$$

et  $b$  un 1-cocycle continu à coefficients dans  $\pi$  qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de  $\pi$  est contenu dans le cortex de  $G$ .

##### 4.1 STRATÉGIE

On considère la fonction conditionnellement de type positif  $\psi: G \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS  $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$  correspondant.

Pour tout  $g \in G$  on a une fonction

$$\psi^g: G \longrightarrow \mathbf{C}: x \longmapsto \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$(4.1) \quad \psi^g = \varphi^g + \chi^g$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit  $\tilde{\mathcal{V}}$  un voisinage de  $1_G$  dans  $\hat{G}$ . En utilisant l'hypothèse que  $b$  n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe  $g \in G$  tel que la fonction  $\varphi^g$  est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de  $\tilde{\mathcal{V}}$  (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit  $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$  le triple GNS défini par  $\varphi^g$ . Il résulte de l'assertion ci-dessus que