

## 3.3 Construction GNS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\mathcal{W}(\varphi; \varepsilon, K) = \left\{ \psi \in L^\infty(G) : \sup_{g \in K} |\varphi(g) - \psi(g)| < \varepsilon \right\}$$

où  $\varepsilon$  est un nombre strictement positif et  $K$  une partie compacte du groupe  $G$ .

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie  $*$ -faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions  $f_n$  sur le groupe additif  $\mathbf{R}$  qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur  $]-\infty, 0]$  et 1 sur  $[\frac{1}{n}, +\infty[$ . Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de  $]0, +\infty[$  alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble  $E_0(G)$  est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie  $*$ -faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore  $G = S^1$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , le caractère

$$\chi_n: S^1 \longrightarrow \mathbf{C}: z \longmapsto z^{-n}$$

pour  $z = e^{2\pi i t} \in S^1$ . Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie  $*$ -faible: pour  $f \in L^1(S^1)$ ,  $\langle \chi_n, f \rangle$  coïncide avec le coefficient de Fourier  $\widehat{f}(n)$  de  $f$  au point  $n$  qui tend vers zéro pour  $n$  tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de  $(\chi_n)$  ne peut converger uniformément vers zéro car  $\sup_{z \in S^1} |\chi_n(z)| = 1$ .

On note  $E(G)$  l'ensemble des états de  $G$ : il s'agit des fonctions  $\varphi$  de type positif sur  $G$  pour lesquelles  $\varphi(e) = 1$ . Raikov a montré que, sur  $E(G)$ , les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie  $*$ -faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe  $S^1$  mais leur limite pour la topologie  $*$ -faible vaut zéro au neutre.

Si  $\text{ex } E_0(G)$  désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe  $E_0(G)$ , on note  $P(G) = (\text{ex } E_0(G)) \setminus \{0\}$  et on observe que  $P(G) \subset E(G)$ . Les éléments de  $P(G)$  s'appellent les états purs. Comme  $E_0(G)$  est convexe et compact pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , le théorème de Krein-Milman nous dit que  $E_0(G)$  est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier,  $P(G)$  est non vide.

### 3.3 CONSTRUCTION GNS

Si  $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  est une représentation unitaire de  $G$  et  $\xi \in \mathcal{H}$ , alors la fonction  $\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi | \xi \rangle$  est une fonction de type positif sur  $G$  telle que  $\varphi(e) = \|\xi\|^2$ . Une telle fonction est dite associée à la représentation  $\pi$ . Réciproquement, pour toute fonction  $\varphi$  non-nulle de type positif, il existe un triple  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$  où  $\pi_\varphi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$  est une représentation unitaire de  $G$

et  $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$  est un vecteur de norme  $\sqrt{\varphi(e)}$  tels que l'orbite de  $\xi_\varphi$  sous l'action de  $\pi_\varphi(G)$  est totale dans  $\mathcal{H}_\varphi$  et, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g) \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle.$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à  $\varphi$ . Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si  $V$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  de support fini alors  $\mathcal{H}_\varphi$  est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant  $V$  pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x) \overline{h(y)} \varphi(y^{-1}x).$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

- (1) si  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  sont trois fonctions de type positif telles que  $\psi = \varphi + \chi$  alors la représentation  $\pi_\varphi$  est une sous-représentation de  $\pi_\psi$  ;
- (2) la fonction de type positif  $\varphi$  est pure si et seulement si la représentation  $\pi_\varphi$  est irréductible ;
- (3) si  $\varphi \equiv 1$  alors  $\pi_\varphi = 1_G$  ;
- (4) si  $\varphi$  est une fonction de type positif associée à une représentation  $\pi$  alors la représentation  $\pi_\varphi$  qu'on associe à  $\varphi$  par construction GNS est une sous-représentation de  $\pi$ .

### 3.4 TOPOLOGIE SUR LE DUAL

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble  $\text{Rep}(G)$  des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact  $G$ . Cette topologie est définie comme ceci. Soient  $\pi$  une représentation,  $\varepsilon > 0$ ,  $K$  un ensemble compact de  $G$ , et  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  des fonctions de type positif associées à  $\pi$ . On note  $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  l'ensemble des représentations  $\rho \in \mathcal{S}$  pour lesquelles il existe des fonctions  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à  $\rho$ , telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall x \in K.$$

Les sous-ensembles du type  $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  forment un système fondamental de voisinages de la représentation  $\pi$  dans  $\text{Rep}(G)$  (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation  $\pi$  est *faiblement contenue* dans un ensemble  $\mathcal{S}$  de représentations de  $G$  si toute fonction de type positif associée à  $\pi$  est limite,