3.4 Topologie sur le dual

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans $\mathcal{H}_\varphi$ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\,\xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle .$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ. Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{C}$ de support fini alors $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\,\overline{h(y)}\,\varphi(y^{-1}x) .$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

(1) si φ, ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;

(2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible;

(3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;

(4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π.

3.4 Topologie sur le dual

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble Rep(G) des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π. On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, x \in K .$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans Rep(G) (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite, pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de $\mathcal{S}$. Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentations unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite infinie $\pi_{n'}$ de π_n, π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur $\widehat{G}$ n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante, $P(G)$ étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si π est une représentation irréductible et $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\widehat{G}$, alors π est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$ si et seulement si π est dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ pour la topologie de Fell.

3.5 Cohomologie et actions affines

Une *action par isométries affines* du groupe G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ est un morphisme α de G dans le groupe $\mathcal{I}so(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}: (g, \xi) \longmapsto \alpha(g)\,\xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ à l'espace de Hilbert de ses translations. Si α est une action par isométries affines alors, pour tout g dans G et tout élément ξ de $\mathcal{H}$, on peut écrire

$$\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$$

où $\pi(g)$ est un opérateur linéaire unitaire et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α, on trouve d'une part que π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$, appelée partie linéaire de α, et d'autre part que b est une application continue de G dans $\mathcal{H}$ qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in G\,.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire π de G sur $\mathcal{H}$ et d'une application continue b de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de cocycle par rapport à π définit une action par isométries affines α de G sur $\mathcal{H}$, par la formule $\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$.