4.3 DÉCOMPOSITION DE CHOQUET

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

le support de ρ est contenu dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$ pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que ρ est une sous-représentation de la représentation GNS associée à ψ^g, qui est elle-même une sous-représentation de π_ψ ; et π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$. Quitte à échanger les rôles de π et $\overline{\pi}$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité car $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\overline{\pi}) \neq 0$ et $\operatorname{supp}\pi \subset \operatorname{cor} G$ si et seulement si $\operatorname{supp}\overline{\pi} \subset \operatorname{cor} G$), on peut supposer que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π.

Le support de σ est dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$, puisqu'il est contenu dans le support de ρ. Comme π est une représentation factorielle, σ et π sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\operatorname{supp}\pi = \operatorname{supp}\sigma \subset \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}\,.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $\widetilde{\mathcal{V}}$, le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.2 Théorème de Schoenberg

Soit ψ une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G. Pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction φ_t définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

$$\lim_{t\to 0}\varphi_t = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi \tag{4.2}$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

4.3 Décomposition de Choquet

On dit qu'une mesure μ sur un espace Ω est *supportée* par une partie mesurable $A \subset \Omega$ si $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F. On note $\operatorname{ex} K$ l'ensemble des points extrémaux de K. Une mesure de probabilité μ supportée par $\operatorname{ex} K$ détermine un unique élément $x \in K$ donné par la formule

$$x = \int_K y\, d\mu(y)\,,$$

entendue au sens $*$-faible, c'est-à-dire au sens où

$$f(x) = \int_K f(y)\, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K, supportée par $\operatorname{ex} K$, telle que

$$x = \int_K y\, d\mu(y)$$

au sens $*$-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure μ qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac δ_x au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble $E_0(G)$ défini au numéro 3.2, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t supportée par $P(G) \cup \{0\}$ telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f\rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f\rangle\, d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(G)$ (voir [Dix], proposition 13.6.8).

4.4 Localisation

On note $\mathcal{V}$ le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G} \colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi\,.$$

On va décomposer les fonctions de type positif φ_t de la façon suivante. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la fonction constante 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Puisque $\lim_{t\to 0} \varphi_t = 1$, on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$. On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\mu_t(\mathcal{W})} \displaystyle\int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$