

## 4.2 CONCLUDING REMARKS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 4.2 CONCLUDING REMARKS

It would be interesting to provide discrete analogues of other “4-vertex type” theorems known in the smooth case, and to find their specifically discrete proofs. We give two examples.

The following statement is a discrete version of the celebrated Möbius theorem (in dimension 2, “flattening” means “inflection”) – see [9]:

*An embedded non-contractible closed polygon in  $\mathbf{RP}^2$  has at least 3 flattenings.*

The notion of flattening for a polygonal line extends, in an obvious way, from  $\mathbf{RP}^d$  to the sphere  $S^d$ . One has the following statement:

*An embedded closed polygon in  $S^2$  bisecting the area has at least 4 flattenings.*

In the smooth case this was proved by B. Segre [14] and by V. Arnold (see [1, 2]).

We are confident that these statements hold true and can be proved in a similar way as in the smooth case. However, a detailed discussion would go beyond the limits of this article.

In conclusion, let us formulate a conjecture. For  $k \geq d + 2$  the following statement is stronger than Theorem 3.11.

**CONJECTURE 4.2.** *A strictly convex polygon in  $\mathbf{RP}^d$  that intersects a hyperplane with multiplicity  $k$  has at least  $k$  flattenings.*

In the smooth case this is precisely Barner’s result in full generality [3]. Conjecture 4.2 would imply strengthenings of Theorems 2.2, 2.6 and 2.10 – see [15] for the smooth case. For instance, the following result would hold.

*Let  $X$  and  $Y$  be two  $n$ -tuples of points in  $\mathbf{RP}^1$  (see Section 2.3). If the closed broken line  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$  in  $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$  intersects the graph of a projective transformation with multiplicity  $k$ , then there exist at least  $k$  extremal triples of indices.*

ACKNOWLEDGMENTS. This work was supported by the Volkswagen-Stiftung (RiP-program at Oberwolfach). We are grateful to the Mathematisches Forschungsinstitut at Oberwolfach for the creative atmosphere. The second author is also grateful to the Max-Planck Institut in Bonn for its hospitality. The second author was supported by an NSF grant.

## REFERENCES

- [1] ARNOLD, V. *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University Lecture Series 5, AMS 1994.
- [2] ——— Topological problems in the theory of wave propagation. *Russian Math. Surveys* 51:1 (1996), 1–47.
- [3] BARNER, M. Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegeebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 20 (1956), 196–215.
- [4] BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Vol. 2. Springer-Verlag, 1923.
- [5] CONNELLY, R. Rigidity. In *Handbook of Convex Geometry*, 223–272. North-Holland, 1993.
- [6] DUVAL, C. and V. OVSIENKO. Schwarzian derivative and Lorentzian world lines. *Funct. Anal. Appl.* 34 (2000), 69–72.
- [7] GHYS, E. *Cercles osculateurs et géométrie lorentzienne*. Talk at the Journée Inaugurale du CMI, 1995, Marseille.
- [8] GUIEU, L., E. MOURRE and V. OVSIENKO. Theorem on six vertices of a plane curve via Sturm theory. *The Arnold-Gelfand Math. Seminars*. Birkhäuser, 1997, 257–266.
- [9] MÖBIUS, A. F. Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse I* (1852), 1–82.
- [10] MUKHOPADHYAYA, S. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 1 (1909), 31–37.
- [11] OVSIENKO, V. and S. TABACHNIKOV. Sturm theory, Ghys theorem on zeroes of the Schwarzian derivative and flattening of Legendrian curves. *Selecta Math. (N. S.)* 2 (1996), 297–307.
- [12] SEDYKH, V. A theorem on four support vertices of a polygonal line. *Funct. Anal. Appl.* 30 (1996), 216–218.
- [13] ——— Discrete versions of the four-vertex theorem. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 180 (1997), 197–207.
- [14] SEGRE, B. Alcune proprietà differenziali in grande delle curve chiuse sghembe. *Rend. Mat. (6)* 1 (1968), 237–297.
- [15] TABACHNIKOV, S. On zeroes of the Schwarzian derivative. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 180 (1997), 229–239.
- [16] ——— A four-vertex theorem for polygons. *Amer. Math. Monthly* 107 (2000), 830–833.