4.6 Constructions GNS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t, on peut supposer que

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de g_0 dans G tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f \right\rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f \right\rangle .$$

Grâce au choix de f, on a

$$\lim_{t \to 0} \left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\varphi_0 - 1\right), f \right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f \right\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re} \psi, f \right\rangle = \lim_{t \to 0} \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f \right\rangle = -\infty .$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \right\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x) \right\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G.

On utilise alors l'égalité (4.3) pour trouver

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\Big\{ \tfrac{1}{t}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad + \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(xg) + \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad - \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big)\Big\}
\end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant les parties compactes de G. Pour tout $t > 0$, soit $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$ (resp. $(\widetilde{\mathcal{H}}_t, \widetilde{\pi}_t, \widetilde{\xi}_t)$) le triple GNS associé à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ (resp. $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$). En posant

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}}(\pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t)\,, \quad \alpha_t^g = \widetilde{\pi}_t(g)\,\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_t \quad \text{et} \quad \beta_t^g = \pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
(4.4)\qquad \langle \pi_\psi(\,.\,)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle = \lim_{t\to 0}\Big\{ &\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle \\
&+ \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle \\
&- \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

pour la topologie de la convergence compacte et donc aussi pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

4.7. PROPOSITION. *On pose* $\alpha_0^g = \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0$ *où* $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$ *est le triple GNS associé à la fonction de type positif* φ_0 *apparaissant dans la proposition 4.5 (iv). Pour le reste, on conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle = \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g\rangle$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle = 0$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(iii) *il existe une sous-suite de* φ_t*, toujours indexée par* t*, et une fonction de type positif* φ^g *telle que, pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$*, on ait*

$$\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle = \varphi^g\,.$$

Preuve. L'assertion (i) est une conséquence du fait que

$$\varphi_0 = \lim_{t\to 0}\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et que $\varphi_0 = \langle \pi_0(\,.\,)\,\xi_0 \mid \xi_0 \rangle$. Grâce à 4.5 (ii) on a

$$\lim_{t\to 0} \big\langle \pi_t(\,.\,)\,\xi_t \mid \xi_t \big\rangle = \lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et donc

$$\lim_{t\to 0} \big\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g \big\rangle = 0$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Enfin, en utilisant la compacité de $E_0(G)$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, on peut extraire une sous-suite telle que $\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ existe. On note cette limite φ^g. $\square$

En passant à la limite dans (4.4), on écrit

$$\big\langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \;\big|\; b_\psi(g) \big\rangle = \varphi^g + \lambda \big\langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \;\big|\; \alpha_0^g \big\rangle \,. \tag{4.5}$$

Pour chaque $g \in G$, ceci fournit un candidat pour une décomposition du type (4.1) avec $\chi^g = \lambda \,\langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$. Il reste à vérifier qu'il existe un élément $g \in G$ tel que la fonction φ^g possède les bonnes propriétés.

4.8. PROPOSITION. *Si le cocycle b n'est pas un cobord, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.*

Preuve. Si $\varphi^g \equiv 0$ pour tout $g \in G$, alors d'une part

$$\begin{aligned}
\big\| \big\langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \;\big|\; b_\psi(g) \big\rangle \big\|_\infty &= \sup_{x\in G} \big| \big\langle \pi_\psi(x)\,b_\psi(g) \;\big|\; b_\psi(g) \big\rangle \big| \\
&= \big\langle \pi_\psi(e)\,b_\psi(g) \;\big|\; b_\psi(g) \big\rangle \\
&= -2\,\psi(g) = 2\,\|b(g)\|^2 ,
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\big\| \big\langle \pi_\psi(\,.\,)b_\psi(g) \;\big|\; b_\psi(g) \big\rangle \big\|_\infty &= \lambda \big\langle \pi_0(e)\,\alpha_0^g \;\big|\; \alpha_0^g \big\rangle \\
&= \lambda \big\langle \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \;\big|\; \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \big\rangle \\
&= 2\lambda \big(1 - \mathrm{Re}\,\varphi_0(g)\big)
\end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. La fonction de type positif φ_0 est bornée; l'égalité $\|b(g)\|^2 = \lambda\,(1 - \mathrm{Re}\,\varphi_0(g))$ implique que b est un cocycle borné sur G, donc un cobord. $\square$

Pour la suite, on fixe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.

4.9. PROPOSITION. *Les fonctions de type positif* $\langle \pi_t(\,.\,)\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ *sont uniformément bornées pour* $t > 0$, *autrement dit*

$$\sup_{t>0} \sup_{x \in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| < \infty \,.$$

Preuve. On a

$$\sup_{x \in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| = \langle \pi_t(e)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \|\eta_t^g\|^2 \,.$$

On va montrer que $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est borné pour $t > 0$. Pour cela, écrivons l'égalité (4.4) au point $x = e$,

$$\left\| b_\psi(g) \right\|^2 = \lim_{t \to 0} \left\{ \langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle & \\ &= \left\{ 2 - 2\, \mathrm{Re} \langle \widetilde{\pi}_t(g)\, \widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t \rangle \right\} - \left\{ 2 - 2\, \mathrm{Re} \langle \pi_t(g)\, \xi_t \mid \xi_t \rangle \right\} \\ &= 2\, \mathrm{Re}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \big) \,, \end{aligned}$$

et les suites

$$\left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right), \qquad \left| \varphi_t^{\mathcal{W}}(g) \right| \qquad \text{et} \qquad \left| \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \right|$$

sont bornées en t. Donc la suite $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est également bornée. $\square$

4.10. PROPOSITION. *La fonction* φ^g *est limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes de fonctions de type positif associées à des représentations de* $\widetilde{\mathcal{V}}$.

Preuve. Grâce aux propositions 4.7 (iii) et 4.9, la fonction de type positif φ^g est limite pour la topologie $*$-faible de fonctions de type positif uniformément bornées associées aux représentations π_t. Ceci implique ([Fel1], Lemma 1.5) qu'il existe une suite θ_t de fonctions de type positif associées aux représentations π_t telle que

$$\varphi^g = \lim_{t \to 0} \theta_t$$

uniformément sur les compacts de G.

De plus, π_t est la représentation GNS associée à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ qui, d'après 4.5 (iii), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Donc les fonctions de type positif associées à π_t sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Finalement, φ^g est elle-même limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Comme les fonctions de type positif appartenant à $\mathcal{V}$ sont associées aux représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$, ceci termine la preuve de la proposition. □

On a donc établi une décomposition de la fonction $\langle \pi_\psi(\,.\,) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$ comme annoncé en 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème. □

RÉFÉRENCES

[BeHa] BEKKA, M. et P. DE LA HARPE. Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière. *Bull. Soc. Math. France 122* (1994), 333–342.

[BeKa] BEKKA, M. et E. KANIUTH. Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation. *J. reine angew. Math. 385* (1988), 203–220.

[BeLo] BEKKA, M. et N. LOUVET. On a variant of Kazhdan's property (T) for subgroups of semisimple groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47* (1997), 1065–1078.

[BLM] BOIDOL, J., J. LUDWIG et D. MÜLLER. On infinitely small orbits. *Studia Math. 88* (1988), 1–11.

[CoSt] COWLING, M. et T. STEGER. The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices. *J. reine angew. Math. 420* (1991), 85–98.

[Cho] CHOQUET, G. *Lectures on Analysis, Vol. 2.* W. A. Benjamin, 1969.

[Dav] DAVIDSON, K. R. *C^*-Algebras by Example.* Fields Institute Monographs *6*. Amer. Math. Soc., 1996.

[Del] DELORME, P. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles — Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France 105* (1977), 281–336.

[Dix] DIXMIER, J. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969.

[Fel1] FELL, J. M. G. The dual spaces of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc. 94* (1960), 365–403.

[Fel2] —— Weak containment and induced representations of groups. *Canad. J. Math. 14* (1962), 237–268.

[Gui1] GUICHARDET, A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations. *J. Multivariate Anal. 6* (1976), 138–158.

[Gui2] —— Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Sci. Math. (2) 96* (1972), 305–332.

[HaVa] DE LA HARPE, P. et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque *175*. Soc. Math. de France, 1989.