Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

Autor: WUTHRICH, Christian

Kapitel: 4. Choix de la courbe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65433

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

en cinq idéaux premiers distincts dans $\mathcal{O}_K$ tandis que les $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$ différents de 11 restent premiers. *PARI-GP*® trouve une base des unités modulo torsion, à savoir : $\{\theta - 2,\ \theta - 3,\ \theta^2 - 5\theta + 5,\ \theta^4 - 8\,\theta^3 + 21\,\theta^2 - 20\,\theta + 5\}$.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $\xi \in \mathcal{O}_K$ avec $\xi \notin (\theta)$ on a*

$$N(\xi) = N_{K:\mathbf{Q}}(\xi) \equiv \pm 1 \pmod{11}.$$

Preuve. Puisque $|N(\xi)| = N((\xi))$ et que (ξ) se factorise en idéaux premiers, il suffit de montrer que $N(\mathfrak{p}) \equiv \pm 1 \pmod{11}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq (\theta)$. Soit $\mathfrak{p}$ est au-dessus d'un premier rationnel $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$ et alors sa norme est égal à $\pm p$, soit $\mathfrak{p}$ est de la forme $p\mathcal{O}_K$ et dans ce cas $N(\mathfrak{p}) = p^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$. $\square$

REMARQUE. Dans l'appendice de [Co], Daniel Coray utilise cette extension $K:\mathbf{Q}$ pour construire une quintique qui contredit le principe de Hasse. Mais elle est lisse et donc de genre 6. L'équation s'écrit

$$N(x + \theta y) = z(z^2 + xz + x^2)(2z^2 + xz + x^2).$$

Par ailleurs, le premier contre-exemple qui est une courbe plane lisse de degré 5 a été construit par Fujiwara dans [Fu].

4. CHOIX DE LA COURBE

La quintique C qui nous servira de contre-exemple au principe de Hasse sera une combinaison linéaire

$$C = C_7 + \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4.$$

On choisit les coefficients g_i et λ_i tels que les termes sans z s'écrivent comme $N(x - \varepsilon y) = N_{K:\mathbf{Q}}(x - \varepsilon y)$ et que les termes sans y s'écrivent comme $N(x - \eta z)$ pour certains ε et $\eta \in K$. J'ai essayé avec un millier de choix différents de (ε, η) pour lesquels il existe des coefficients g_i et λ_i. Parmi ceux auxquels ma méthode de démonstration s'applique, j'ai choisi le plus simple :

$$\varepsilon = -1 + 4\theta - \theta^2 \in \mathcal{O}_K^* \quad \text{et} \quad \eta = -3 + \theta \in \mathcal{O}_K^*,$$

dont les normes sont

$$N(x - \varepsilon y) = x^5 - 6x^4y + 10x^3y^2 - x^2y^3 - 6xy^4 + y^5$$

$$N(x - \eta z) = x^5 + 4x^4z + 2x^3z^2 - 5x^2z^3 - 2xz^4 + z^5,$$

et les coefficients

$$g_0 = 1\,, \qquad g_1 = -3\,, \qquad g_2 = \tfrac{5}{2}\,, \qquad g_3 = 0\,, \qquad g_4 = -\tfrac{7}{4}\,,$$
$$\lambda_0 = -6\,, \qquad \lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = \tfrac{5}{8}\,, \qquad \lambda_3 = -1\,, \qquad \lambda_4 = -2\,.$$

Cela nous donne la courbe C donnée par (1.1) dans le théorème principal. Le polynôme minimal de ω est $p(X) = 4 - 12X + 10X^2 - 7X^4 + 4X^5$, qui est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Dans la suite on pose $r := -16N(x - \varepsilon y)$ et $s := -16N(x - \eta z)$. Puis on constate que l'équation (1.1) peut être réécrite sous chacune des deux formes suivantes:

$$r = -16N(x - \varepsilon y) = z \cdot f\,, \tag{4.1}$$

$$s = -16N(x - \eta z) = y \cdot g\,, \tag{4.2}$$

où f et g sont des polynômes homogènes de degré 4 sur $\mathbf{Z}$.

5. Démonstration du cas local

Proposition 5.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *possède des points lisses dans tous les complétés de* $\mathbf{Q}$.

Preuve. Comme le degré de C est impair, il est clair que $C/\mathbf{R}$ possède un point lisse. On commence petit à petit par les premiers nombres premiers p.

Pour $p = 2$: lorsque l'on remplace z par $8z$ dans l'équation (1.1), on obtient une courbe dont la réduction modulo 2 est égale à

$$x^5 + x^2y^3 + y^5 + y^4z = 0\,.$$

Elle a un point lisse $(0 : 1 : 1)$ sur $\mathbf{F}_2$. Ensuite, on trouve facilement des points lisses de la réduction de C modulo p pour $2 < p < 19$: $(1 : 1 : 2)$ pour $\mathbf{F}_3$, $(0 : 1 : 3)$ pour $\mathbf{F}_5$, $(0 : 1 : 5)$ pour $\mathbf{F}_7$, $(1 : 0 : 7)$ pour $\mathbf{F}_{11}$, $(0 : 1 : 1)$ pour $\mathbf{F}_{13}$ et $(0 : 1 : -2)$ pour $\mathbf{F}_{17}$.

Lemme 5.2. *Soit $p \geq 19$, soit $\widehat{C}$ la réduction de C modulo p. On suppose que $\widehat{C}$ n'est pas une composante de sa Hessienne H. Alors $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$ contient un point lisse.*

Preuve. On suppose d'abord que $\widehat{C}$ est irréductible. Soit $\hat{c}$ la normalisée de $\widehat{C}$. Si elle est une courbe de genre 1, alors par le théorème de Hasse-Weil pour la courbe lisse projective $\hat{c}$, on a