Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

Autor: WUTHRICH, Christian

Kapitel: 5. DÉMONSTRATION DU CAS LOCAL

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65433

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

et les coefficients

$$g_0 = 1\,, \qquad g_1 = -3\,, \qquad g_2 = \tfrac{5}{2}\,, \qquad g_3 = 0\,, \qquad g_4 = -\tfrac{7}{4}\,,$$
$$\lambda_0 = -6\,, \qquad \lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = \tfrac{5}{8}\,, \qquad \lambda_3 = -1\,, \qquad \lambda_4 = -2\,.$$

Cela nous donne la courbe C donnée par (1.1) dans le théorème principal. Le polynôme minimal de ω est $p(X) = 4 - 12X + 10X^2 - 7X^4 + 4X^5$, qui est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Dans la suite on pose $r := -16N(x - \varepsilon y)$ et $s := -16N(x - \eta z)$. Puis on constate que l'équation (1.1) peut être réécrite sous chacune des deux formes suivantes:

$$r = -16N(x - \varepsilon y) = z \cdot f\,, \tag{4.1}$$

$$s = -16N(x - \eta z) = y \cdot g\,, \tag{4.2}$$

où f et g sont des polynômes homogènes de degré 4 sur $\mathbf{Z}$.

5. Démonstration du cas local

Proposition 5.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *possède des points lisses dans tous les complétés de* $\mathbf{Q}$.

Preuve. Comme le degré de C est impair, il est clair que $C/\mathbf{R}$ possède un point lisse. On commence petit à petit par les premiers nombres premiers p.

Pour $p = 2$: lorsque l'on remplace z par $8z$ dans l'équation (1.1), on obtient une courbe dont la réduction modulo 2 est égale à

$$x^5 + x^2y^3 + y^5 + y^4z = 0\,.$$

Elle a un point lisse $(0 : 1 : 1)$ sur $\mathbf{F}_2$. Ensuite, on trouve facilement des points lisses de la réduction de C modulo p pour $2 < p < 19$: $(1 : 1 : 2)$ pour $\mathbf{F}_3$, $(0 : 1 : 3)$ pour $\mathbf{F}_5$, $(0 : 1 : 5)$ pour $\mathbf{F}_7$, $(1 : 0 : 7)$ pour $\mathbf{F}_{11}$, $(0 : 1 : 1)$ pour $\mathbf{F}_{13}$ et $(0 : 1 : -2)$ pour $\mathbf{F}_{17}$.

Lemme 5.2. *Soit $p \geq 19$, soit $\widehat{C}$ la réduction de C modulo p. On suppose que $\widehat{C}$ n'est pas une composante de sa Hessienne H. Alors $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$ contient un point lisse.*

Preuve. On suppose d'abord que $\widehat{C}$ est irréductible. Soit $\hat{c}$ la normalisée de $\widehat{C}$. Si elle est une courbe de genre 1, alors par le théorème de Hasse-Weil pour la courbe lisse projective $\hat{c}$, on a

$$\#\hat{c}(\mathbf{F}_p) > p + 1 - 2\sqrt{p} \geq (\sqrt{19} - 1)^2 > 11\,.$$

La contraction sur $\widehat{C}$ peut écraser 10 de nos points lisses, mais il reste au moins un point lisse sur $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$

Si $\widehat{C}/\mathbf{F}_p$ est de genre 0, ou si elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en ayant une composante simple définie sur $\mathbf{F}_p$, le même argument montre qu'elle a toujours suffisamment de points pour en avoir qui soient lisses. Le seul cas où il faut s'inquiéter c'est quand elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en cinq droites. Mais ce cas est exclu par notre hypothèse, car cela voudrait dire que chaque point de $\widehat{C}$ serait un point d'inflexion, et se trouverait donc sur la Hessienne H. $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit donc de calculer la résultante de H avec $\widehat{C}$, en éliminant z, ce qui donne la réduction de

$$2^{44} \cdot (4x^5 - 12x^4y + 10x^3y^2 - 7xy^4 + 4y^5)^6 \cdot q(x : y)\,,$$

où $q(x : y)$ est un polynôme homogène, primitif, de degré 15. Ce n'est jamais 0 modulo un premier $p > 2$. $\square$

6. Démonstration du cas global

Proposition 6.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *n'a pas de point rationnel.*

Preuve. On suppose que $(x : y : z)$ est une solution rationnelle de (1.1). On peut supposer que x, y et z sont des entiers et qu'ils n'ont pas de facteur en commun.

Soit p un premier rationnel différent de 2 et de 11, avec $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$. Alors p ne divise pas r dans la formule (4.1) : sinon $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y$ serait dans $p\mathcal{O}_K$. Le fait que $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ montre alors que p diviserait y et $x + y$. Puisque p ne peut pas être facteur des trois coordonnées, on aurait donc $p \nmid z$, d'où $p \mid f$. Mais $f \equiv 16z^4 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

De la même manière, on montre que p ne divise pas s. Donc r et s sont composés de facteurs premiers 2, 11 et de premiers de la forme $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$. La même conclusion est vraie pour leurs facteurs y, z, f et g. Considérons $p = 2$ de plus près : rappelons-nous que $2\mathcal{O}_K$ est un idéal premier. On dénote par β la valuation de y en $2\mathbf{Z}$, et par γ celle de z.