Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

Kapitel: 5. DÉMONSTRATION DU CAS LOCAL

Autor: WUTHRICH, Christian

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65433

et les coefficients

$$g_0 = 1\,, \qquad g_1 = -3\,, \qquad g_2 = \tfrac{5}{2}\,, \qquad g_3 = 0\,, \qquad g_4 = -\tfrac{7}{4}\,,$$
$$\lambda_0 = -6\,, \qquad \lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = \tfrac{5}{8}\,, \qquad \lambda_3 = -1\,, \qquad \lambda_4 = -2\,.$$

Cela nous donne la courbe C donnée par (1.1) dans le théorème principal. Le polynôme minimal de ω est $p(X) = 4 - 12X + 10X^2 - 7X^4 + 4X^5$, qui est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Dans la suite on pose $r := -16N(x - \varepsilon y)$ et $s := -16N(x - \eta z)$. Puis on constate que l'équation (1.1) peut être réécrite sous chacune des deux formes suivantes :

$$r = -16N(x - \varepsilon y) = z \cdot f\,, \tag{4.1}$$

$$s = -16N(x - \eta z) = y \cdot g\,, \tag{4.2}$$

où f et g sont des polynômes homogènes de degré 4 sur $\mathbf{Z}$.

5. Démonstration du cas local

Proposition 5.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *possède des points lisses dans tous les complétés de* $\mathbf{Q}$.

Preuve. Comme le degré de C est impair, il est clair que $C/\mathbf{R}$ possède un point lisse. On commence petit à petit par les premiers nombres premiers p.

Pour $p = 2$: lorsque l'on remplace z par $8z$ dans l'équation (1.1), on obtient une courbe dont la réduction modulo 2 est égale à

$$x^5 + x^2y^3 + y^5 + y^4z = 0\,.$$

Elle a un point lisse $(0 : 1 : 1)$ sur $\mathbf{F}_2$. Ensuite, on trouve facilement des points lisses de la réduction de C modulo p pour $2 < p < 19$: $(1 : 1 : 2)$ pour $\mathbf{F}_3$, $(0 : 1 : 3)$ pour $\mathbf{F}_5$, $(0 : 1 : 5)$ pour $\mathbf{F}_7$, $(1 : 0 : 7)$ pour $\mathbf{F}_{11}$, $(0 : 1 : 1)$ pour $\mathbf{F}_{13}$ et $(0 : 1 : -2)$ pour $\mathbf{F}_{17}$.

Lemme 5.2. *Soit $p \geq 19$, soit $\widehat{C}$ la réduction de C modulo p. On suppose que $\widehat{C}$ n'est pas une composante de sa Hessienne H. Alors $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$ contient un point lisse.*

Preuve. On suppose d'abord que $\widehat{C}$ est irréductible. Soit $\hat{c}$ la normalisée de $\widehat{C}$. Si elle est une courbe de genre 1, alors par le théorème de Hasse-Weil pour la courbe lisse projective $\hat{c}$, on a

$$\# \hat{c}(\mathbf{F}_p) > p + 1 - 2\sqrt{p} \geq (\sqrt{19} - 1)^2 > 11 \, .$$

La contraction sur $\widehat{C}$ peut écraser 10 de nos points lisses, mais il reste au moins un point lisse sur $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$

Si $\widehat{C}/\mathbf{F}_p$ est de genre 0, ou si elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en ayant une composante simple définie sur $\mathbf{F}_p$, le même argument montre qu'elle a toujours suffisamment de points pour en avoir qui soient lisses. Le seul cas où il faut s'inquiéter c'est quand elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en cinq droites. Mais ce cas est exclu par notre hypothèse, car cela voudrait dire que chaque point de $\widehat{C}$ serait un point d'inflexion, et se trouverait donc sur la Hessienne H. □

Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit donc de calculer la résultante de H avec $\widehat{C}$, en éliminant z, ce qui donne la réduction de

$$2^{44} \cdot (4x^5 - 12x^4y + 10x^3y^2 - 7xy^4 + 4y^5)^6 \cdot q(x:y) \, ,$$

où $q(x:y)$ est un polynôme homogène, primitif, de degré 15. Ce n'est jamais 0 modulo un premier $p > 2$. □

6. Démonstration du cas global

Proposition 6.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *n'a pas de point rationnel.*

Preuve. On suppose que $(x:y:z)$ est une solution rationnelle de (1.1). On peut supposer que x, y et z sont des entiers et qu'ils n'ont pas de facteur en commun.

Soit p un premier rationnel différent de 2 et de 11, avec $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$. Alors p ne divise pas r dans la formule (4.1): sinon $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y$ serait dans $p\mathcal{O}_K$. Le fait que $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ montre alors que p diviserait y et $x+y$. Puisque p ne peut pas être facteur des trois coordonnées, on aurait donc $p \nmid z$, d'où $p \mid f$. Mais $f \equiv 16z^4 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

De la même manière, on montre que p ne divise pas s. Donc r et s sont composés de facteurs premiers 2, 11 et de premiers de la forme $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$. La même conclusion est vraie pour leurs facteurs y, z, f et g. Considérons $p = 2$ de plus près : rappelons-nous que $2\mathcal{O}_K$ est un idéal premier. On dénote par β la valuation de y en $2\mathbf{Z}$, et par γ celle de z.