

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE  
**Autor:** WUTHRICH, Christian  
**Kapitel:** 6. DÉMONSTRATION DU CAS GLOBAL  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65433>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\#\hat{c}(\mathbf{F}_p) > p + 1 - 2\sqrt{p} \geq (\sqrt{19} - 1)^2 > 11.$$

La contraction sur  $\hat{C}$  peut écraser 10 de nos points lisses, mais il reste au moins un point lisse sur  $\hat{C}(\mathbf{F}_p)$

Si  $\hat{C}/\mathbf{F}_p$  est de genre 0, ou si elle se décompose sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  en ayant une composante simple définie sur  $\mathbf{F}_p$ , le même argument montre qu'elle a toujours suffisamment de points pour en avoir qui soient lisses. Le seul cas où il faut s'inquiéter c'est quand elle se décompose sur  $\bar{\mathbf{F}}_p$  en cinq droites. Mais ce cas est exclu par notre hypothèse, car cela voudrait dire que chaque point de  $\hat{C}$  serait un point d'inflexion, et se trouverait donc sur la Hessienne  $H$ .  $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit donc de calculer la résultante de  $H$  avec  $\hat{C}$ , en éliminant  $z$ , ce qui donne la réduction de

$$2^{44} \cdot (4x^5 - 12x^4y + 10x^3y^2 - 7xy^4 + 4y^5)^6 \cdot q(x : y),$$

où  $q(x : y)$  est un polynôme homogène, primitif, de degré 15. Ce n'est jamais 0 modulo un premier  $p > 2$ .  $\square$

## 6. DÉMONSTRATION DU CAS GLOBAL

**PROPOSITION 6.1.** *La courbe  $C$  donnée par (1.1) n'a pas de point rationnel.*

*Preuve.* On suppose que  $(x : y : z)$  est une solution rationnelle de (1.1). On peut supposer que  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des entiers et qu'ils n'ont pas de facteur en commun.

Soit  $p$  un premier rationnel différent de 2 et de 11, avec  $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$ . Alors  $p$  ne divise pas  $r$  dans la formule (4.1): sinon  $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y$  serait dans  $p\mathcal{O}_K$ . Le fait que  $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$  est une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{O}_K$  montre alors que  $p$  diviserait  $y$  et  $x + y$ . Puisque  $p$  ne peut pas être facteur des trois coordonnées, on aurait donc  $p \nmid z$ , d'où  $p \mid f$ . Mais  $f \equiv 16z^4 \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

De la même manière, on montre que  $p$  ne divise pas  $s$ . Donc  $r$  et  $s$  sont composés de facteurs premiers 2, 11 et de premiers de la forme  $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$ . La même conclusion est vraie pour leurs facteurs  $y$ ,  $z$ ,  $f$  et  $g$ . Considérons  $p = 2$  de plus près: rappelons-nous que  $2\mathcal{O}_K$  est un idéal premier. On dénote par  $\beta$  la valuation de  $y$  en  $2\mathbf{Z}$ , et par  $\gamma$  celle de  $z$ .

On suppose dans un premier temps que  $\beta, \gamma > 0$ . Alors  $2 \nmid x$ , ce qui dit que  $x - \varepsilon y \notin 2\mathcal{O}_K$ . Ceci implique que  $2^4 \parallel r$ , autrement dit que  $0 < \gamma \leq 4$  et que  $2^{4-\gamma} \parallel f$ . (On a utilisé la notation  $\parallel$  pour dire «divise exactement»). Calculons  $f$  modulo 16:

$$f \equiv 4y^2 \cdot 3x^2 + 4y^3 \cdot x + 2y^4 \cdot 5 + 4yz \cdot x^2 + 2y^2z \cdot 5x + y^2z^2 + 8yz^3 \pmod{16}.$$

Par hypothèse,  $y$  et  $z$  sont au moins une fois divisibles par 2, le terme à droite est donc égal à 0 modulo 16, ce qui n'est pas possible car  $16 \nmid f$ .

Occupons-nous à présent du cas  $\beta = 0$  et  $\gamma > 0$ : on a  $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y \notin 2\mathcal{O}_K$ , alors comme avant  $2^{4-\gamma} \parallel f$ . Cette fois-ci on regarde  $f$  modulo 4:

$$f \equiv 2 \cdot y^4 + 2xz \cdot y^2 + z^2 \cdot y^2 \equiv 2 \pmod{4},$$

puisque  $2 \nmid y$ . Cela veut dire que  $2 \parallel f$  et donc  $\gamma = 3$ . (On a vu dans 5.1 que derrière cela «se cache» une solution 2-adique. On ne pourrait pas l'éliminer en considérant  $p = 2$ .)

Comme dernière possibilité, on considère  $\beta \geq 0$  et  $\gamma = 0$ : on voit que  $x - \eta z = x + 3z - \theta z \notin 2\mathcal{O}_K$  (car  $2 \nmid z$ ), alors  $2^{4-\beta} \parallel g$  et  $0 \leq \beta \leq 4$ . On a

$$g \equiv 12x^2yz + 4xy^2z + 10y^3z + 4x^2z^2 + 10xyz^2 + yz^3 + 8z^4 \pmod{16}.$$

Si  $\beta < 2$ , alors

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{2^{4-\beta}} = |g|_2 = |yz^3|_2 = \frac{1}{2^\beta} > \frac{1}{4}.$$

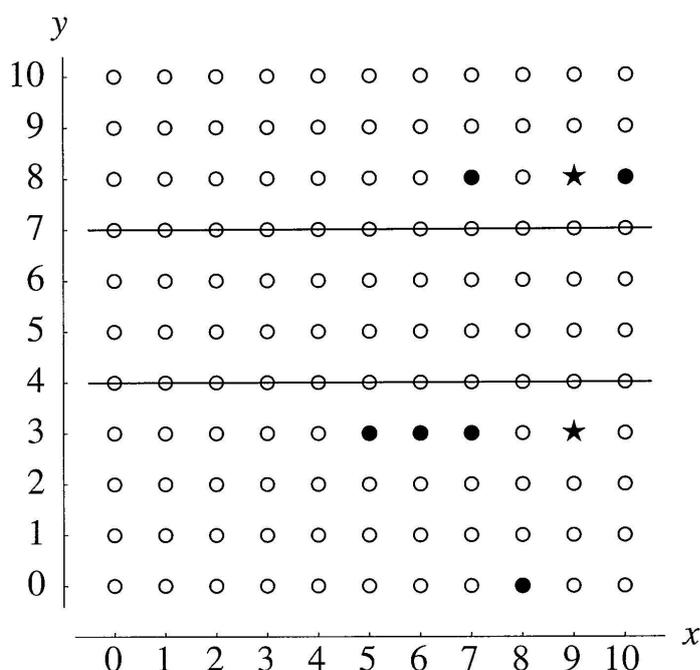
Si  $\beta > 2$ , alors  $4 \mid g$ , c-à-d.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2^{4-\beta}} = |g|_2 \leq \frac{1}{4}.$$

Autrement dit,  $\beta = 2$ .

En résumé, il y a deux cas possibles pour  $(\beta, \gamma)$ : soit  $(0, 3)$  soit  $(2, 0)$ . Pour la fin de la démonstration, on se penche sur le premier  $p = 11$ :

PREMIER CAS:  $y$  et  $z$  ne sont pas divisibles par 11. On sait qu'ils sont composés de facteurs 2 et  $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$ . Si  $(\beta, \gamma) = (0, 3)$ , alors  $y \equiv \pm 1 \pmod{11}$  et  $z \equiv \pm 2^3 \equiv \pm 8 \pmod{11}$ . Leurs réductions se trouvent sur une des deux droites  $l_1: y = 4z$  ou  $l_2: y = 7z$  définies sur  $\mathbf{F}_{11}$ . Si  $(\beta, \gamma) = (2, 0)$ , on a  $y \equiv \pm 4 \pmod{11}$  et  $z \equiv \pm 1 \pmod{11}$ . Leurs réductions se trouvent sur les même droites. Mais ces deux droites ne coupent la courbe  $\widehat{C}/\mathbf{F}_{11}$  en



FIGURE

La réduction de la courbe  $C$  dans le plan affine  $z = 1$  sur  $\mathbf{F}_{11}$

aucun point rationnel sur  $\mathbf{F}_{11}$ . La figure ci-dessus présente une « image » de la courbe dans la carte affine  $z = 1$  sur  $\mathbf{F}_{11}$ . Les points noirs sont des points lisses et les étoiles des points singuliers de  $\widehat{C}$ .

DEUXIÈME CAS:  $z$  est divisible par 11. Alors  $11 \mid zf = -16N(x - \varepsilon y)$ , autrement dit,  $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y \in (\theta)$ . Pour cela il faut que  $x + y \in 11\mathbf{Z}$ , c-à-d.  $x \equiv -y \not\equiv 0 \pmod{11}$ . On calcule  $f$  modulo 11, sachant que  $z \equiv 0 \pmod{11}$  :

$$f \equiv 64x^4 - 224x^3y + 108x^2y^2 + 116xy^3 + 10y^4 \equiv 4y^4 \pmod{11}.$$

Dans le cas  $(\beta, \gamma) = (0, 3)$ , il faut que  $y \equiv \pm 1 \pmod{11}$  puisqu'il n'est pas divisible par 11. D'autre part,  $f \equiv 4 \pmod{11}$  devrait être le produit de  $2^1 \equiv 2 \pmod{11}$  et de facteurs  $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$ . Dans le cas  $(\beta, \gamma) = (2, 0)$ , on a aussi une contradiction:  $y \equiv \pm 4$ ,  $f \equiv 4 \cdot 4^4 \equiv 1 \pmod{11}$  et  $f \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \pmod{11}$ .

TROISIÈME CAS:  $y$  est divisible par 11. Alors  $11 \mid yg = -16N(x - \eta z)$ . Pour cela il faut que  $x + 3z \in 11\mathbf{Z}$ . Cette fois-ci on considère  $g$  modulo 11, sachant que  $y \equiv 0 \pmod{11}$  et  $x \equiv -3z \pmod{11}$  :

$$g \equiv -96x^4 - 224x^3z + 68x^2z^2 + 160xz^3 - 56z^4 \equiv 9z^4 \pmod{11}.$$

Comme avant, dans le cas  $(\beta, \gamma) = (0, 3)$  :  $z \equiv \pm 8$  et  $g \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \not\equiv 9 \cdot 8^4 \equiv 3 \pmod{11}$ . Et dans le cas  $(\beta, \gamma) = (2, 0)$  :  $z \equiv \pm 1$  et  $g \equiv 2^2 \cdot (\pm 1) \not\equiv 9 \pmod{11}$ .  $\square$

## 7. LA JACOBIENNE DE $C$

Il est certainement intéressant de connaître la jacobienne associée à la courbe. Nous allons construire une application birationnelle

$$\vartheta: C \dashrightarrow \text{Jac}(C) = E$$

définie sur  $\mathbf{Q}(\omega)$  à l'aide d'une transformation de Cremona de degré 3 du plan.

L'image de la conique  $B$  par l'application  $j$  est la droite

$$b = \overline{j(B)} = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\} \subset S \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4.$$

Prenons le point  $R = (0 : 0 : 0 : 1 : \omega) \in b(\mathbf{Q}(\omega))$  et calculons le plan tangent à  $S$  en  $R$  :

$$T_R S = T_R \mathcal{Q}_0 \cap T_R \mathcal{Q}_1 : \{-\omega x_0 + x_1 = 0, \quad \omega x_1 - x_2 = 0\}.$$

L'intersection de  $S$  avec  $T_R S$  se décompose en deux droites  $b$  et  $e_1$ , où la seconde, qui correspond au diviseur exceptionnel de  $j$  au-dessus du point  $P_1$ , est décrite par les équations suivantes :

$$x_1 - \omega x_0 = 0, \quad x_2 - \omega x_1 = 0, \quad x_4 - \omega x_3 - (g_1 + g_3 \omega^2 + \omega^4) x_0 = 0.$$

A ces trois équations correspondent trois cubiques du plan, passant par les points  $P_i$  et ayant un point double en  $P_1$  :

$$\begin{aligned} A'_0: (y - \omega x)(xz - y^2) &= 0, & A'_1: (z - \omega y)(xz - y^2) &= 0, \\ A'_2: -g_0 \omega x^3 + (g_0 - g_1 \omega) x^2 y &+ (-g_2 \omega - g_3 \omega^2 - \omega^4) x^2 z \\ &+ (g_1 + g_3 \omega^2 + \omega^4) x y^2 + (g_2 - g_3 \omega) x y z \\ &+ (g_3 - g_4 \omega) x z^2 + (g_4 - \omega) y z^2 + z^3 &= 0. \end{aligned}$$

Les trois cubiques  $\{A'_0, A'_1, A'_2\}$  constituent une base du système linéaire de telles cubiques définies sur  $\mathbf{Q}(\omega)$ . On peut constater que l'application associée  $\vartheta': \mathbf{P}_{\mathbf{Q}(\omega)}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Q}(\omega)}^2$  est birationnelle car deux telles cubiques n'ont qu'un point d'intersection hors des points  $P_i$ . Elle contracte les quatre droites  $P_1 P_j$  en des points  $Q_j \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$  et elle contracte la conique  $B$  en un point  $Q_1 = (0 : 0 : 1)$ . D'autre part, elle éclate les points  $P_i$ . Le diviseur