Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

Kapitel: 7. La jacobienne de C

Autor: WUTHRICH, Christian

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65433

Comme avant, dans le cas $(\beta,\gamma) = (0,3)$: $z \equiv \pm 8$ et $g \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \not\equiv 9 \cdot 8^4 \equiv 3 \pmod{11}$. Et dans le cas $(\beta,\gamma) = (2,0)$: $z \equiv \pm 1$ et $g \equiv 2^2 \cdot (\pm 1) \not\equiv 9 \pmod{11}$. $\square$

7. La jacobienne de C

Il est certainement intéressant de connaître la jacobienne associée à la courbe. Nous allons construire une application birationnelle

$$\vartheta \colon C \dashrightarrow \mathrm{Jac}(C) = E$$

définie sur $\mathbf{Q}(\omega)$ à l'aide d'une transformation de Cremona de degré 3 du plan.

L'image de la conique B par l'application j est la droite

$$b = \overline{j(B)} = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\} \subset S \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}.$$

Prenons le point $R = (0:0:0:1:\omega) \in b(\mathbf{Q}(\omega))$ et calculons le plan tangent à S en R :

$$T_R S = T_R \mathcal{Q}_0 \cap T_R \mathcal{Q}_1 \colon \ \{-\omega x_0 + x_1 = 0, \quad \omega x_1 - x_2 = 0\}.$$

L'intersection de S avec $T_R S$ se décompose en deux droites b et e_1, où la seconde, qui correspond au diviseur exceptionnel de j au-dessus du point P_1, est décrite par les équations suivantes :

$$x_1 - \omega x_0 = 0, \qquad x_2 - \omega x_1 = 0, \qquad x_4 - \omega x_3 - (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)x_0 = 0.$$

A ces trois équations correspondent trois cubiques du plan, passant par les point P_i et ayant un point double en P_1 :

$$A_0' \colon (y - \omega x)(xz - y^2) = 0, \qquad A_1' \colon (z - \omega y)(xz - y^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} A_2' \colon & -g_0\omega x^3 + (g_0 - g_1\omega)x^2 y + (-g_2\omega - g_3\omega^2 - \omega^4)x^2 z \\ & + (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)xy^2 + (g_2 - g_3\omega)xyz \\ & + (g_3 - g_4\omega)xz^2 + (g_4 - \omega)yz^2 + z^3 = 0. \end{aligned}$$

Les trois cubiques $\{A_0', A_1', A_2'\}$ constituent une base du système linéaire de telles cubiques définies sur $\mathbf{Q}(\omega)$. On peut constater que l'application associée $\vartheta' \colon \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)} \dashrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)}$ est birationnelle car deux telles cubiques n'ont qu'un point d'intersection hors des points P_i. Elle contracte les quatre droites P_1P_j en des points $Q_j \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$ et elle contracte la conique B en un point $Q_1 = (0:0:1)$. D'autre part, elle éclate les points P_i. Le diviseur exceptionnel au-dessus de P_1 est la conique B' définie par les Q_i et les diviseurs exceptionnels au-dessus des autres points P_j sont des droites.

Sous cette transformation ϑ', la quintique C se simplifie en une cubique lisse $E'/\mathbf{Q}(\omega)$ passant par les quatre points Q_j pour $1 < j \leq 5$, d'équation du style

$$0 = (-5632 + 8448\omega + 640\omega^2 + 5184\omega^4)\, x^3 + \cdots + 1024\, z^3 .$$

En reliant les deux autres intersections de E' avec B', on trouve un point T de E' défini sur $\mathbf{Q}(\omega)$ qui peut servir pour transformer E' en une forme de Weierstrass E (voir [Ca]), sans être obligé de monter dans un corps encore plus grand. Là, le miracle prédit par la théorie : E est définie sur $\mathbf{Q}$ (puisqu'elle est la jacobienne de C, une courbe définie sur $\mathbf{Q}$). Sans donner les détails du calcul, je présente les résultats : l'*invariant*

$$j = \frac{3443566663693729}{1289106508910} = \frac{151009^3}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 421 \cdot 27836461} = 2671{,}2817\ldots ,$$

la *forme canonique*

$$Y^2 = X^3 + AX + B$$

avec

$$A = -452233232961724703800443015164268$$
$$B = -21996454706369000130454317982498938894605994928 ,$$

la *forme minimale globale* de E

$$Y^2 = X^3 + X^2 + a_4 X + a_6$$

avec

$$a_4 = -558312633286079881235114833536 1$$
$$a_6 = -301734632460480297633076911306447913665 7958145$$

et le *conducteur arithmétique*

$$N = 114386472262040142825667816137 48382652 80$$
$$= 2^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37^2 \cdot 421 \cdot 72497^2 \cdot 151009^2 \cdot 27836461 .$$

Grâce à quelques réductions, on montre que *le groupe de torsion de* $E(\mathbf{Q})$ *est trivial.* Par construction, (C, ϑ) représente un élément d'ordre 5 du groupe de Tate-Shafarevich $\text{Ш}(E/\mathbf{Q})$. Si ce groupe est fini, son ordre est divisible par 25.

REMERCIEMENTS. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Sylvia Guibert, à Christian Liedtke, aux frères Bartholdi et surtout aux professeurs Dino Lorenzini et Daniel Coray.

Les calculs monstrueux avec des milliers de polynômes ont été faits par *Mathematica*® et *PARI-GP*®.

RÉFÉRENCES

[Be] BEAUVILLE, A. *Surfaces algébriques complexes.* Astérisque 54, 1978.

[Ca] CASSELS, J. W. S. *Lectures on Elliptic Curves.* Cambridge Univ. Press, 1991.

[CF] CASSELS, J. W. S. et A. FRÖHLICH. *Algebraic Number Theory.* Academic Press, London, 1967.

[CCS] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L., D. CORAY et J.-J. SANSUC. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math. 320* (1980), 150–191.

[CP] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et B. POONEN. Algebraic families of nonzero elements of the Shafarevich-Tate group. *J. Amer. Math. Soc. 13* (2000), 83–99.

[Co] CORAY, D. F. Arithmetic on Cubic Surfaces. PhD thesis. University of Cambridge, 1974.

[Fi] FISHER, T. A. On 5 and 7 Descents for Elliptic Curves. PhD thesis. University of Cambridge, 2000.

[Fu] FUJIWARA, M. Hasse principle in algebraic equations. *Acta Arith. 22* (1972/73), 267–276.

[Li] LIND, C.-E. Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins. PhD thesis. University of Uppsala, 1940.

[Re] REICHARDT, H. Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen. *J. reine angew. Math. 184* (1942), 12–18.

[Se] SELMER, E. The diophantine equation $aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0$. *Acta Math. 85* (1951), 203–362.

(Reçu le 22 janvier 2001)

Christian Wuthrich

Section de Mathématiques
Case postale 240
CH-1211 Genève 24
Suisse
e-mail: christian.wuthrich@math.unige.ch