

3. Hyperbolic metric spaces

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. HYPERBOLIC METRIC SPACES

We refer the reader to [1, 4, 14, 20, 25, 32, 40] for the basic information about Gromov-hyperbolic metric spaces. We briefly recall the main definitions.

If (X, d) is a geodesic metric space and $x, y \in X$, we shall denote by $[x, y]$ a geodesic segment from x to y in X .

DEFINITION 3.1 (Gromov product). Let (X, d) be a metric space and suppose $x, y, z \in X$. We set

$$(x, y)_z := \frac{1}{2}[d(z, x) + d(z, y) - d(x, y)].$$

Note that $(x, y)_z = (y, x)_z$.

DEFINITION 3.2 (Hyperbolic metric space [1]). Let (X, d) be a geodesic metric space. We say that (X, d) is δ -hyperbolic (where $\delta \geq 0$) if for any $p, x, y, z \in X$ we have:

$$(x, y)_p \geq \min\{(x, z)_p, (y, z)_p\} - \delta.$$

The space X is said to be *hyperbolic* if it is δ -hyperbolic for some $\delta \geq 0$.

There are many equivalent definitions of hyperbolicity, for example:

PROPOSITION 3.3 ([1, 20, 32]). *Let (X, d) be a geodesic metric space. Then the following conditions are equivalent.*

1. *The space X is hyperbolic.*
2. *There exists a constant $\delta' \geq 0$ such that if $x, y, z \in X$ and $y' \in [x, y]$, $z' \in [x, z]$ are such that $d(x, y') = d(x, z') \leq (y, z)_x$ then $d(y', z') \leq \delta'$.*
3. *(Thin Triangles Condition) There exists $\delta'' \geq 0$ such that for any $x, y, z \in X$, for any geodesic segments $[x, y]$, $[x, z]$ and $[y, z]$ and for any point $p \in [x, y]$ there is a point $q \in [x, z] \cup [y, z]$ such that $d(p, q) \leq \delta''$.*

DEFINITION 3.4 (Word-hyperbolic group). A finitely generated group G is said to be *word-hyperbolic* if for some (and hence for any) finite generating set A of G the Cayley graph $\Gamma(G, A)$ is hyperbolic.

DEFINITION 3.5 (Gromov product for sets). Let (X, d) be a metric space. Let $x \in X$ and $Q, Q' \subseteq X$. Define $(Q, Q')_x := \sup\{(q, q')_x \mid q \in Q, q' \in Q'\}$.