

10. L'ÉQUATION $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$10. \text{ L'ÉQUATION } \frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$$

Après s'être demandé si un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base x pouvait être une puissance pure, il est naturel de se poser la même question pour les nombres s'écrivant avec le même chiffre, ou bien avec le même bloc de chiffres, répété plusieurs fois. Ce problème s'avère en général plus simple que l'étude de (1), et il fut résolu, dans le cas de la base 10 et pour tout chiffre autre que 1, par Obláth [39] dès 1956. Par la suite, Inkeri [25] considéra le cas d'autres bases, mais il buta lui aussi sur l'équation (1). Il observa cependant que si l'on sait résoudre (1) pour un entier $x \geq 2$ fixé, alors il devient assez facile de résoudre l'équation

$$(11) \quad a \frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q, \quad \text{en inconnues } n \geq 3, x \geq 2, 1 \leq a < x, y \geq 2, q \geq 2,$$

par exemple en étudiant les diviseurs premiers de $(x^n - 1)/(x - 1)$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant [10] et avons les moyens de résoudre complètement (11) pour toute valeur fixée de x , ... dans les limites, bien sûr, des possibilités des ordinateurs !

THÉORÈME 17. *Les seules solutions de l'équation (11) avec $x \leq 100$ ou $x = 1000$ sont*

$$(a, x, y, n, q) \in \left\{ (1, 3, 11, 5, 2), (1, 7, 20, 4, 2), (4, 7, 40, 4, 2), (1, 18, 7, 3, 3), \right. \\ (7, 18, 49, 3, 2), (7, 18, 7, 3, 4), (8, 18, 14, 3, 3), (3, 22, 39, 3, 2), \\ (12, 22, 78, 3, 2), (19, 30, 133, 3, 2), (21, 41, 1218, 4, 2), \\ \left. (13, 68, 247, 3, 2), (52, 68, 494, 3, 2), (58, 99, 7540, 4, 2) \right\}.$$

En particulier, ce théorème affirme que si a , b et c désignent n'importe quel chiffre, alors aucun des nombres non nuls écrits en base dix

$$aa \dots aa, \quad abab \dots abab \quad \text{et} \quad abcabc \dots abcabc$$

n'est une puissance pure, sauf, bien sûr, les nombres a , ab et abc lorsque ceux-ci sont des puissances parfaites.