10. L'ÉQUATION $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

10. L'ÉQUATION $\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$

Après s'être demandé si un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base x pouvait être une puissance pure, il est naturel de se poser la même question pour les nombres s'écrivant avec le même chiffre, ou bien avec le même bloc de chiffres, répété plusieurs fois. Ce problème s'avère en général plus simple que l'étude de (1), et il fut résolu, dans le cas de la base 10 et pour tout chiffre autre que 1, par Obláth [39] dès 1956. Par la suite, Inkeri [25] considéra le cas d'autres bases, mais il buta lui aussi sur l'équation (1). Il observa cependant que si l'on sait résoudre (1) pour un entier $x \geq 2$ fixé, alors il devient assez facile de résoudre l'équation

$$(11) \qquad a\,\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q\,, \qquad \text{en inconnues } n \geq 3,\ x \geq 2,\ 1 \leq a < x,\ y \geq 2,\ q \geq 2,$$

par exemple en étudiant les diviseurs premiers de $(x^n - 1)/(x - 1)$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant [10] et avons les moyens de résoudre complètement (11) pour toute valeur fixée de x, ... dans les limites, bien sûr, des possibilités des ordinateurs !

THÉORÈME 17. *Les seules solutions de l'équation (11) avec* $x \leq 100$ *ou* $x = 1000$ *sont*

$$\begin{aligned}(a,x,y,n,q) \in \{\, & (1,3,11,5,2),(1,7,20,4,2),(4,7,40,4,2),(1,18,7,3,3),\\ & (7,18,49,3,2),(7,18,7,3,4),(8,18,14,3,3),(3,22,39,3,2),\\ & (12,22,78,3,2),(19,30,133,3,2),(21,41,1218,4,2),\\ & (13,68,247,3,2),(52,68,494,3,2),(58,99,7540,4,2)\,\}.\end{aligned}$$

En particulier, ce théorème affirme que si a, b et c désignent n'importe quel chiffre, alors aucun des nombres non nuls écrits en base dix

$$aa\ldots aa\,, \qquad abab\ldots abab \qquad \text{et} \qquad abcabc\ldots abcabc$$

n'est une puissance pure, sauf, bien sûr, les nombres a, ab et abc lorsque ceux-ci sont des puissances parfaites.