Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 48 (2002)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DE NAGELL-LJUNGGREN $\frac{x^n – 1}{x – 1} = y^q$
Autor: Bugeaud, Yann / MIGNOTTE, Maurice
Kapitel: 11. Le cas x < 0
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66071

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

11. Le cas $x < 0$

Les résultats de Nagell et Ljunggren mentionnés au paragraphe 2 sont plus généraux que le Théorème 1, car ils incluent la résolution de (1) pour $x < 0$. Comme il est expliqué dans [18], ce problème revient à résoudre l'équation

$$\frac{x^n + 1}{x + 1} = y^q, \quad \text{en entiers } x > 1,\ y > 1,\ n \geq 3 \text{ impair},\ q \geq 2\,, \tag{12}$$

qui possède la solution $(x, y, n, q) = (19, 7, 3, 3)$. Il s'agit d'ailleurs de l'unique solution avec $n = 3$ ou 4 [36, 37, 31]. Il est tentant de conjecturer qu'il s'agit là de l'unique solution de (12), mais nous sommes loin de pouvoir le démontrer. Cependant, nous avons plusieurs résultats partiels, qui vont dans le sens de cette conjecture.

Les méthodes utilisées lors de l'étude de l'équation (1) s'appliquent également à (12), et permettent de démontrer les résultats suivants. En outre, de nouvelles estimations [11] ont permis de considérablement réduire le temps de calcul [18].

Théorème 18. *Si l'équation (12) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p - 1$. En particulier, on a $x \geq 2q + 1$. L'équation (12) n'a pas de solution (x, y, n, q) avec $2 \leq x \leq 10^4$ et $n \geq 5$.*

Le cas particulier $x = 2$ est traité dans [12], l'équation correspondante intervenant dans la classification des groupes finis simples.

12. Applications

La question suivante apparaît en théorie des groupes finis et est fortement liée à l'équation (1): trouver des nombres premiers P et Q et des entiers rationnels $n \geq 3$ et $a \geq 1$ tels que

$$\frac{Q^n - 1}{Q - 1} = P^a\,.$$

Plusieurs travaux y font référence, notamment [12, 23, 29, 49] et [40, page 121]. Observons que l'équation (12) possède également des liens avec la théorie des groupes finis [12].

Une autre application concerne l'irrationalité de nombres réels dont le développement décimal est de la forme suivante. Soient $g \geq 2$ et $h \geq 2$ des