11. Le cas x < 0

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

11. Le cas $x < 0$

Les résultats de Nagell et Ljunggren mentionnés au paragraphe 2 sont plus généraux que le Théorème 1, car ils incluent la résolution de (1) pour $x < 0$. Comme il est expliqué dans [18], ce problème revient à résoudre l'équation

$$\frac{x^n+1}{x+1} = y^q, \quad \text{en entiers } x > 1,\ y > 1,\ n \geq 3 \text{ impair},\ q \geq 2\,, \tag{12}$$

qui possède la solution $(x, y, n, q) = (19, 7, 3, 3)$. Il s'agit d'ailleurs de l'unique solution avec $n = 3$ ou 4 [36, 37, 31]. Il est tentant de conjecturer qu'il s'agit là de l'unique solution de (12), mais nous sommes loin de pouvoir le démontrer. Cependant, nous avons plusieurs résultats partiels, qui vont dans le sens de cette conjecture.

Les méthodes utilisées lors de l'étude de l'équation (1) s'appliquent également à (12), et permettent de démontrer les résultats suivants. En outre, de nouvelles estimations [11] ont permis de considérablement réduire le temps de calcul [18].

Théorème 18. *Si l'équation (12) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p - 1$. En particulier, on a $x \geq 2q + 1$. L'équation (12) n'a pas de solution (x, y, n, q) avec $2 \leq x \leq 10^4$ et $n \geq 5$.*

Le cas particulier $x = 2$ est traité dans [12], l'équation correspondante intervenant dans la classification des groupes finis simples.

12. Applications

La question suivante apparaît en théorie des groupes finis et est fortement liée à l'équation (1) : trouver des nombres premiers P et Q et des entiers rationnels $n \geq 3$ et $a \geq 1$ tels que

$$\frac{Q^n - 1}{Q - 1} = P^a\,.$$

Plusieurs travaux y font référence, notamment [12, 23, 29, 49] et [40, page 121]. Observons que l'équation (12) possède également des liens avec la théorie des groupes finis [12].

Une autre application concerne l'irrationalité de nombres réels dont le développement décimal est de la forme suivante. Soient $g \geq 2$ et $h \geq 2$ des