

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

**Autor:** Capitanio, Gianmarco

**Kapitel:** 1.2 Points critiques incidents, liés et libres

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Remplaçons le générateur  $\Xi_{p_0}^{k-1}$  par  $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$ , qui est encore de la forme (1), car  $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$ . L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1};$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie  $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$ .  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces  $M_k^f$  on peut définir un autre opérateur de bord  $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où  $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs  $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$  de  $\xi_\ell^k$  à  $\xi_m^{k-1}$ . Puisque l'attachement des cellules  $\sigma_\ell^k$  est induit par la rétraction des espaces  $E^\lambda$  le long des trajectoires intégrales de  $Y$ , on a  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de  $Y$  entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes  $(M_*^f, \partial_*)$  et  $(M_*^f, \delta_*)$  ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit  $(M_*^f, \partial_*)$  le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ . A chaque point critique  $\xi_\ell^k$  correspond le générateur  $\Xi_\ell^k$ , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

**DÉFINITION.** On dit que deux points critiques  $\xi_\ell^k$  et  $\xi_m^{k-1}$  de  $f$  sont *incidents* si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ , *liés* si  $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$ . Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.

DÉFINITION. On appelle *diagramme (du complexe) de Morse* la représentation suivante du complexe de Morse de  $f$ . On considère  $K + 1$  axes réels verticaux (avec la même échelle et l'origine à la même hauteur), numérotés, de gauche à droite, de  $K$  à  $0$ . Sur le  $i$ -ème axe on considère les points critiques de  $f$  d'indice  $i$ , disposés selon leur valeur critique. On joint par un segment en tirets les couples de points critiques incidents, par un segment continu les couples de points critiques liés (cf. Figure 1).

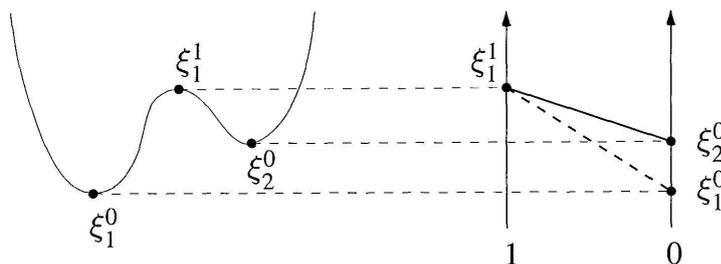


FIGURE 1

Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto \xi^4 - \xi^2 + \xi$

REMARQUES. Considérons un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ .

(1) Les segments qui ont  $\xi_\ell^k$  comme extrémité sont tous du même côté de l'axe où se trouve  $\xi_\ell^k$ , car  $\partial^2 = 0$ .

(2) Les segments (orientés du point d'indice plus grand vers celui d'indice plus petit) ont tous pente négative, car si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  alors  $f(\xi_\ell^k) > f(\xi_m^{k-1})$ .

(3) Un point critique peut être une extrémité de plusieurs segments en tirets, mais d'un seul segment continu (au plus).

PROPOSITION 1.3. Soit  $(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  un couple de points critiques liés. Alors  $\xi_m^{k-1}$  est le point critique de valeur critique maximale parmi les points critiques incidents à  $\xi_\ell^k$  tels que  $[\xi_j^k : \xi_m^{k-1}] = 0$  pour tout  $j < \ell$ ;  $\xi_\ell^k$  est le point critique de valeur critique minimale parmi les points critiques incidents à  $\xi_m^{k-1}$  tels que  $[\xi_\ell^k : \xi_j^{k-1}] = 0$  pour tout  $j > m$ .

PROPOSITION 1.4. Un point critique  $\xi$  est libre si et seulement si pour tout point critique  $\eta$  incident à  $\xi$ , il existe un point critique  $\xi'$ , incident à  $\eta$ , tel que

$$|f(\xi') - f(\eta)| < |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Les deux propositions sont une conséquence immédiate du choix de l'indice  $p_0$  dans la preuve du lemme algébrique.

PROPOSITION 1.5. *Deux points critiques de  $f$  liés le sont aussi en tant que points critiques de  $-f$ .*

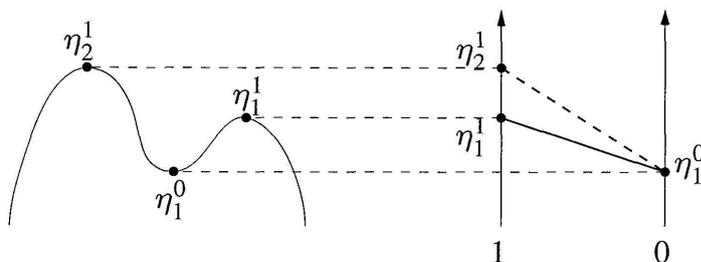


FIGURE 2

Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto -(\xi^4 - \xi^2 + \xi)$

*Démonstration.* Un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ , d'indice  $k$ , est un point critique de  $-f$ , d'indice  $K - k$ . Soit  $c := f(\xi_\ell^k)$ ; d'après le Théorème 1.2 on a

$$E_f^{c+\epsilon} \simeq E_f^{c-\epsilon} \cup \sigma_\ell^k, \quad E_{-f}^{-c+\epsilon} \simeq E_{-f}^{-c-\epsilon} \cup \tau_m^{K-k}.$$

Or, puisque  $\partial\sigma_\ell^k$  et  $\partial\tau_m^{K-k+1}$  sont enchaînées, on a  $[\sigma_j^i, \sigma_h^{i-1}] = \pm[\tau_h^{K-i+1}, \tau_j^{K-i}]$  (voir [DNF], vol. III, § 18). Il s'ensuit que les complexes de Morse de  $f$  et de  $-f$  ont les mêmes couples de points critiques incidents. Puisque l'on obtient le complexe de  $-f$  de celui de  $f$  par une symétrie qui ne change pas la pente des segments (cf. Figure 2), la proposition précédente entraîne que les couples de points critiques liés sont les mêmes.  $\square$

### 1.3 LE NIVEAU CRITIQUE DE MINIMAX

Soit maintenant  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , quadratique à l'infini, c'est-à-dire  $f(\xi) = Q_\infty(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand, où  $Q_\infty$  est une forme quadratique non dégénérée d'indice  $k_\infty$ . On ne suppose pas nécessairement que  $f$  soit de Morse excellente. Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  considérons la famille d'inclusions naturelles  $i_\lambda: E^\lambda \hookrightarrow E$ , qui induit les homomorphismes  $i_\lambda^*: \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \rightarrow \tilde{H}_*(E^\lambda, E^{-\infty})$  des groupes d'homologie relative réduite à valeurs en  $\mathbf{Q}$ .

Comme  $f$  est quadratique à l'infini, on a

$$\tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(\mathbf{S}^{k_\infty}).$$

Soit  $\Gamma$  un générateur de  $\tilde{H}_{k_\infty}(E, E^{-\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .