Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

Autor: Capitanio, Gianmarco

Kapitel: 2.3 La solution de minimax

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66676

COROLLAIRE. *Pour tout $T > 0$ fixé, Λ^T admet une unique fgqi $S(t,q;\xi)$ (modulo les opérations d'équivalence* (i) *et* (ii)*), telle que son graphe restreint à $t = 0$ coïncide avec le graphe de la donnée initiale u_0.*

Dans la suite, S sera toujours une telle fgqi.

Démonstration. Soit $\widetilde{S}(t,q;\xi)$ l'unique fgqi de Λ^T. Or, cette fonction est une primitive de la forme de Liouville $p\,dq$ de Λ_0 :

$$d\widetilde{S}(0,q;\bar{\xi}_0(q)) = du_0(q)\,dq\,,$$

où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S_0(q;\xi)$. Par conséquent il existe une unique constante C telle que $S := \widetilde{S} + C$ vérifie $S(0,q;\bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$ pour tout $q \in Q$. $\square$

REMARQUE. On peut construire une famille génératrice globale de la solution géométrique Λ comme suit. La *fonctionnelle d'action $\int pdq - Hdt$* est une famille génératrice formelle (l'espace de paramètre étant de dimension infinie) de Λ. En utilisant une méthode de point fixe, proposée par Amann-Conley-Zehnder, on obtient une vraie fonction génératrice, voir [Car].

2.3 LA SOLUTION DE MINIMAX

Soient $t > 0, q \in Q$ et $S(t,q;\xi)$ la fgqi de la solution géométrique tronquée Λ^T, pour $T > t$. La fonction $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est quadratique à l'infini, donc on peut lui associer le niveau critique de minimax, étudié au § 1.3.

DÉFINITION (Chaperon). On appelle *solution de minimax* de (PC) la fonction

$$u(t,q) := \min\max\{\xi \mapsto S(t,q;\xi)\}\,.$$

REMARQUE. L'autre solution que l'on peut construire avec ce même argument (cf. [Cha]), *la solution de max-min* est, pour le Théorème 1.9, la même solution.

M. Chaperon ([Cha]), T. Joukovskaïa ([Jou]), C. Viterbo ([Vi2]) ont étudié les propriétés de cette fonction; en particulier Joukovskaïa a classifié les singularités génériques de u en dimension petite $(\dim Q \leq 2)$.

THÉORÈME 2.2 (Chaperon). *La solution de minimax est une solution faible*[7]) *de* (*PC*), *lipschitzienne sur chaque intervalle compact* $[0,T]$, *et indépendante du choix de la fgqi.*

REMARQUE. Pour le Théorème 1.8, on peut supposer, sans perte de généralité, que la solution géométrique de (*PC*) soit générique. Dans ce cas l'ensemble $\pi(\Sigma) \cup M_\Lambda$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit Λ générique. La continuité de la solution de minimax u est une conséquence immédiate de la stabilité du minimax par petites déformations. En effet, fixons un point (t_0, q_0) de l'espace-temps et un $\epsilon > 0$. Pour tout (t,q) assez proche de (t_0, q_0), la fonction $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une perturbation de $\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)$ aussi petite que l'on veut. D'après le Théorème 1.8, on déduit que $|u(t_0,q_0) - u(t,q)| < \epsilon$.

Les autres propriétés de la solution de minimax sont simples à démontrer; on renvoie pour les détails aux travaux déjà cités.

Soit $(t_0, q_0) \notin M_\Lambda$, $t_0 > 0$. Par le théorème de la fonction implicite il existe un voisinage $\mathfrak{U}$ de (t_0, q_0) dans $]0, +\infty[\times Q$ où le point critique libre de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une fonction $\bar{\xi}(t,q)$ de classe C^1, définie par $\partial_\xi S(t,q;\xi) = 0$. Alors pour tout $(t,q) \in \mathfrak{U}$ on a $u(t,q) = S(t,q;\bar{\xi}(t,q))$, donc u est de classe C^1, et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; en effet

$$\partial_t u(t,q) = \partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)), \qquad \partial_q u(t,q) = \partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q)),$$

et par définition de fgqi on a $\partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)) + H(t,q,\partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q))) = 0$. Donc, en dehors de l'ensemble de Maxwell de Λ, u est dérivable et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi. La solution de minimax satisfait la donnée initiale, parce que l'on a choisi la fgqi de la solution géométrique telle que $S(0,q;\bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$, où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S(0,q;\xi)$.

Pour tout $0 < T < +\infty$, $u|_{[0,T]}$ est lipschitzienne: en effet H et u_0 sont lipschitziens, donc en un temps fini les espaces tangents aux fronts d'onde ne sont jamais verticaux.

On déduit enfin du théorème de Viterbo que u ne dépend pas du choix de S parmi les fgqi de Λ telles que $S(0,q;\bar{\xi}(q)) = u_0(q)$. $\square$

REMARQUE. Viterbo a montré que les mêmes résultats restent vrais pour hamiltoniens et données initiales seulement lipschitziens, voir [Vi2]. On approche H et u_0 par des suites de fonctions $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $\{u_{0,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$,

---

[7]) C'est-à-dire u est continue et presque partout dérivable, et en ces points vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; de plus u satisfait la donnée initiale.

suffisamment régulières, convergentes vers H et u_0 respectivement. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on construit la solution de minimax u_n du problème de Cauchy de hamiltonien H_n et donnée initiale $(u_{0,n})$; il suit que la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien H et donnée initiale u_0.

3. Caractérisation géométrique de la solution de minimax

3.1 Notations

Soit $J^0\mathbf{R} = \{(q,z)\} \simeq \mathbf{R}^2$ l'espace des jets d'ordre 0 sur $\mathbf{R}$, $\pi_0 \colon J^0\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la projection naturelle $(q,z) \mapsto q$. Un front d'onde dans $J^0\mathbf{R}$ est la projection dans $J^0\mathbf{R}$ d'une courbe legendrienne de $J^1\mathbf{R} = \{(q,z,p)\} \simeq \mathbf{R}^3$ par $\pi_1 \colon (q,z,p) \mapsto (q,z)$. Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit F un front de $J^0\mathbf{R}$. On appelle *section* de F toute partie connexe maximale σ qui est le graphe d'une fonction $\chi_\sigma \colon \pi_0(\sigma) \to \mathbf{R}$ de classe C^1 par morceaux. Une *branche* de F est une section de classe C^1.

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$, il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en z est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp : *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendent* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de $J^1\mathbf{R}$ sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de $J^1\mathbf{R}$. Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]) : *queue d'aronde* (Q), *pyramide* (P), *porte-monnaie* (B) et *auto-tangence sûre*[8]) (J^-).

Les auto-tangences dangereuses[9]) sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

[8]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

[9]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.