

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

**Autor:** Capitanio, Gianmarco

**Kapitel:** 3.1 Notations

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

suffisamment régulières, convergentes vers  $H$  et  $u_0$  respectivement. Pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  on construit la solution de minimax  $u_n$  du problème de Cauchy de hamiltonien  $H_n$  et donnée initiale  $(u_{0,n})$ ; il suit que la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien  $H$  et donnée initiale  $u_0$ .

### 3. CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SOLUTION DE MINIMAX

#### 3.1 NOTATIONS

Soit  $J^0\mathbf{R} = \{(q, z)\} \simeq \mathbf{R}^2$  l'espace des jets d'ordre 0 sur  $\mathbf{R}$ ,  $\pi_0: J^0\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la projection naturelle  $(q, z) \mapsto q$ . Un front d'onde dans  $J^0\mathbf{R}$  est la projection dans  $J^0\mathbf{R}$  d'une courbe legendrienne de  $J^1\mathbf{R} = \{(q, z, p)\} \simeq \mathbf{R}^3$  par  $\pi_1: (q, z, p) \mapsto (q, z)$ . Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit  $F$  un front de  $J^0\mathbf{R}$ . On appelle *section* de  $F$  toute partie connexe maximale  $\sigma$  qui est le graphe d'une fonction  $\chi_\sigma: \pi_0(\sigma) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux. Une *branche* de  $F$  est une section de classe  $C^1$ .

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de  $\mathbf{R}$ , il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en  $z$  est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp: *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendant* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de  $J^1\mathbf{R}$  sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de  $J^1\mathbf{R}$ . Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]): *queue d'aronde* ( $Q$ ), *pyramide* ( $P$ ), *porte-monnaie* ( $B$ ) et *auto-tangence sûre*<sup>8)</sup> ( $J^-$ ).

Les auto-tangences dangereuses<sup>9)</sup> sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

<sup>8)</sup> Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

<sup>9)</sup> Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.

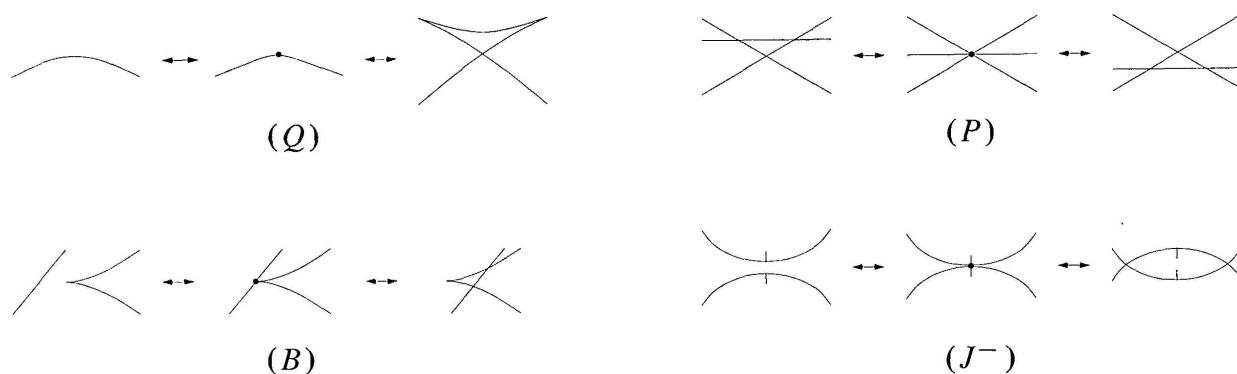


FIGURE 6

Singularités permises dans l'isotopie entre deux fronts

Le nombre de cusps d'un front, comptés avec leur signe (positif pour les cusps montants, négatif pour les cusps descendants), le *nombre de Maslov*, est invariant par isotopies legendriennes.

### 3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Dans cette section on rappelle brièvement la construction d'un nouvel invariant des nœuds legendriens, dû à Yu. Chekanov et P. Pushkar, qui permettra d'établir une caractérisation géométrique de la solution de minimax.

La projection d'un nœud legendrien de  $J^1\mathbf{R}$  dans  $J^0\mathbf{R}$  par  $\pi_1$  est un front fermé. Soit  $\Sigma$  un tel front, générique.

On appelle *décomposition* de  $\Sigma$  des courbes  $X_1, \dots, X_n$  fermées, ayant un nombre fini d'auto-intersections, telles que pour  $i \neq j$ ,  $X_i \cap X_j$  contient un nombre fini de points, et  $X_1 \cup \dots \cup X_n = \Sigma$ .

Un point double  $x \in X_i \cap X_j$  de  $\Sigma$  est un *point de saut* si  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas lisses en  $x$ , *de Maslov* si le nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui séparent le long du front les deux branches se coupant en  $x$  est 0.

DÉFINITION. Une décomposition  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\Sigma$  est *admissible* si :

- (1) chaque  $X_i$  est homéomorphe au bord d'un disque :  $\partial X_i = B_i$  ;
- (2) pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q \in \mathbf{R}$ , l'ensemble

$$B_i(q) := \{z \in \mathbf{R} \mid (q, z) \in B_i\}$$

est connexe; en particulier si c'est un point, ce point est un cusp du front;

- (3) si  $(q_0, z) \in X_i \cap X_j$  ( $i \neq j$ ) est un point de saut alors pour  $q \neq q_0$ , assez proche  $q_0$ , l'ensemble  $B_i(q) \cap B_j(q)$  est soit  $B_i(q)$ , soit  $B_j(q)$ , soit vide;
- (4) les points de sauts sont tous de Maslov.