

# 3.1 Shift operator and construction of the Baker-Akhiezer function

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

The solution can easily be computed by differentiating the first equation and then subtracting the second, thus obtaining the new system

$$\begin{cases} \psi'' - \frac{2}{x}\psi' = k^2\psi, \\ \psi'' - (\frac{1}{x} + k^2x)\psi' = -k^3x\psi. \end{cases}$$

Taking the difference, we get the first order equation

$$\psi' = \frac{k^2x}{kx - 1}\psi,$$

whose solution (up to constants) is given by  $\psi = (kx - 1)e^{kx}$ .

In fact, one can easily calculate  $\psi_m$  for a general  $m$ .

PROPOSITION 2.12.  $\psi_m(k, x) = (x\partial - 2m + 1)(x\partial - 2m - 1) \cdots (x\partial - 1)e^{kx}$ .

*Proof.* We could use the direct method of Example 2.11, but it is more convenient to proceed differently. Namely, we have

$$(\partial^2 - \frac{2m}{x}\partial)(x\partial - 2m + 1) = (x\partial - 2m + 1)(\partial^2 - \frac{2(m-1)}{x}\partial)$$

as it is easy to verify directly. So using induction on  $m$  starting with  $m = 0$ , we get

$$(\partial^2 - \frac{2m}{x}\partial)\psi_m(k, x) = (x\partial - 2m + 1)(\partial^2 - \frac{2(m-1)}{x}\partial)\psi_{m-1}(k, x) = k^2\psi_m(k, x),$$

and  $\psi_m(k, x)$  is our solution.  $\square$

### 3. LECTURE 3

#### 3.1 SHIFT OPERATOR AND CONSTRUCTION OF THE BAKER-AKHIEZER FUNCTION

In Lecture 2, we have introduced the Baker-Akhiezer function  $\psi(k, x)$  for the operator

$$L = \Delta - \sum_{s \in \Sigma} \frac{2c_s}{\alpha_s(x)} \partial_{\alpha_s}.$$

The way to construct  $\psi(k, x)$  is via the Opdam shift operator. Given a function  $m: \Sigma \rightarrow \mathbf{Z}_+$ , Opdam showed in [Op1] that there exists a unique  $W$ -invariant

differential operator  $S_m$  of the form  $\delta_m(x)\delta_m(\partial_x)+l.o.t.$ , with  $\delta_m(x) = \prod_{s \in \Sigma} \alpha_s^{m_s}$  such that

$$L_q S_m = S_m q(\partial)$$

for every  $q \in \mathbf{C}[\mathfrak{h}] = \mathbf{C}[q_1, \dots, q_n]$ . From this, if we set  $\psi(k, x) = S_m e^{(k, x)}$ , we get

$$(7) \quad L_q \psi = S_m q(\partial) e^{(k, x)} = q(k) \psi,$$

$q \in \mathbf{C}[q_1, \dots, q_n]$ .

We claim that equation (7) must in fact hold for all  $q \in Q_m$ . Indeed, near a generic point  $x$ , the functions  $\psi(wk, x)$  are obviously linearly independent and satisfy (7) for symmetric  $q$ . Thus, they are a basis in the space of solutions (we know that this space is  $|W|$ -dimensional). Consider the matrix of  $L_q$  in this basis for any  $q \in Q_m$ . Since  $\psi(k, x)$  is a polynomial multiplied by  $e^{(k, x)}$ , this matrix must be diagonal with eigenvalues  $q(k)$ , as desired.

EXAMPLE 3.1. As we have seen in the previous section, for  $W = \mathbf{Z}/2$  and  $\mathfrak{h} = \mathbf{C}$ ,

$$S_m = (x\partial - 2m + 1)(x\partial - 2m - 1) \cdots (x\partial - 1).$$

### 3.2 BEREST'S FORMULA FOR $L_q$

We are now going to give an explicit construction of the operators  $L_q$  for any  $q \in Q_m$ .

Let us identify, using our  $W$ -invariant scalar product,  $\mathfrak{h}$  with  $\mathfrak{h}^*$ , and let us choose an orthonormal basis  $x_1, \dots, x_n$  in  $\mathfrak{h}^*$ . If  $x \in \mathfrak{h}^*$ , we will write  $D_x$  for the Dunkl operator relative to the vector in  $\mathfrak{h}$  corresponding to  $x$  under our identification. Thus

$$L = \sum_{i=1}^n D_{x_i}^2.$$

PROPOSITION 3.2 (Berest [Be]). *If  $q \in Q_m$  is a homogeneous element of degree  $d$ , then*

$$(\text{ad } L)^{d+1} q = 0.$$

*Proof.* It is enough to prove that

$$((\text{ad } L)^{d+1} q) \psi(k, x) = 0.$$

Indeed, it follows from the definition of  $\psi(k, x)$  that in the ring  $\mathcal{D}(U)$  this implies:  $((\text{ad } L)^{d+1} q) S_m = 0$ , so that  $(\text{ad } L)^{d+1} q = 0$ , since  $\mathcal{D}(U)$  is a domain.