

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 52 (2006)  
**Heft:** 3-4: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Développements limités et réversion des séries  
**Autor:** Bacher, Roland / Lass, Bodo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2236>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 28.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET RÉVERSION DES SÉRIES

par Roland BACHER et Bodo LASS

RÉSUMÉ. Nous étudions quelques propriétés nouvelles liées aux développements limités et à la transformée de Hankel. Nous les démontrons en utilisant l'approche combinatoire de la réversion des séries et des fractions continues.

### 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de décrire quelques interactions entre combinatoire et algèbre. Plus précisément, nous étudions certains liens entre la réversion des séries (formelles) et les matrices de Hankel. Les deux sujets sont classiques : la plupart des fonctions importantes, par exemple  $\exp$ ,  $\sin$  ou  $\tan$ , possèdent en effet des fonctions inverses ( $\log$ ,  $\arcsin$ ,  $\arctan$  dans notre cas) et un théorème célèbre de Lagrange relie le développement en série d'une fonction analytique au développement en série de sa fonction inverse (pour la composition). Du côté de la combinatoire, inverser des séries génératrices est une technique standard, par exemple pour la résolution de problèmes d'énumération, voir [8]. La formule de Lagrange-Bürmann est également utile dans l'étude de certains aspects des formes modulaires, voir [15]. Les matrices de Hankel apparaissent naturellement lorsqu'on considère les moments d'une mesure de probabilité convenable sur  $\mathbf{R}$  et sont étroitement reliées aux polynômes orthogonaux et à certaines fractions continues. Un traitement combinatoire de ces matrices a été donné par exemple par Flajolet dans [5] ou par Viennot dans [19] et [20]. Les références [11] et [18] contiennent également quelques informations historiques.

Notre article est organisé comme suit.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons le théorème de Lagrange (concernant la réversion des séries) et une preuve classique au début du

chapitre 2. Dans le reste du chapitre, nous énonçons notre résultat principal, un lien entre le théorème de Lagrange et une suite de développements limités.

Le chapitre 3 relie la suite associée aux développements limités à la “transformée inverse”.

Le chapitre 4 contient deux exemples illustrant les résultats énoncés.

Le chapitre 5, indépendant du reste, décrit une déformation continue naturelle qui permet d’interpoler entre l’inversion  $\frac{1}{f}$  et la réversion  $(xf)^{\langle -1 \rangle}$  d’une série formelle  $f \in 1 + x\mathbb{C}[[x]]$ .

Nous discutons ensuite quelques jolies propriétés de la matrice de Hankel associée à la suite obtenue par des développements limités, au chapitre 6.

Le chapitre 7 rappelle une interprétation combinatoire classique qui fait le lien entre les matrices de Hankel et divers objets combinatoires (chemins, mots de Łukasiewicz). Ces ingrédients sont ensuite utilisés pour prouver une partie de nos résultats. Ce chapitre contient également des preuves succinctes de résultats classiques (à l’exception de la proposition 2 qui est peut-être moins connue) ainsi qu’une digression décrivant une action du groupe diédral infini sur les mots de Łukasiewicz.

Le chapitre final contient des résultats concernant les déterminants de matrices de Hankel ainsi que les preuves des résultats non démontrés antérieurement.

Dans la suite, nous travaillerons toujours sur un corps de caractéristique zéro.

## 2. LE THÉORÈME D’INVERSION DE LAGRANGE

L’ensemble des séries formelles du type  $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$  telles que  $\alpha_1 \neq 0$  (pour un corps de base fixé une fois pour toutes) constitue un groupe pour la *composition*. L’inverse  $q(x)$  d’une telle série  $p(x)$  est uniquement défini par l’équation  $q \circ p(x) = x$ , et d’ailleurs aussi par  $p \circ q(x) = x$ . Le passage de  $p$  à  $q$ , qui est ce que nous appelons ici la *réversion des séries*, est l’objet d’un théorème célèbre de Lagrange, qui semble avoir son origine historique dans l’article [13].

Pour la commodité du lecteur, nous indiquons d’abord au théorème 1 une démonstration du théorème de Lagrange sans doute assez proche de l’original, en suivant le joli article de Henrici [11]. Par ailleurs, le chapitre 7 contient une autre démonstration classique, basée sur la combinatoire des mots de Łukasiewicz. Il existe de nombreuses autres présentations, dont [2],

pages 158–161, [8], pages 15–18, [9], pages 129–133, [16], pages 145–149, [18], pages 38–39 et [21], pages 128–136.

L'ensemble des séries formelles du type  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$  telles que  $s_0 \neq 0$  constitue un autre groupe pour la multiplication. Le passage de  $s(x)$  à  $1/s(x)$  est ce que nous appelons ici l'inversion des séries, et nous y revenons aux chapitres 3 et 5. Il faut néanmoins prendre garde au fait que de nombreux auteurs utilisent le terme "inversion" dans le contexte du théorème de Lagrange.

Soit  $g(x) = \sum_{n \geq N} \gamma_n x^n$  une série de Laurent formelle à une indéterminée, où  $N \in \mathbf{Z}$  et où les coefficients  $\gamma_n$  sont dans le corps de base; on pose  $\gamma_n = 0$  pour  $n < N$ . Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , nous écrivons  $[x^n](g(x))$  le  $n$ -ième coefficient  $\gamma_n$  de  $g(x)$ . Le théorème de Lagrange, ou de Lagrange-Bürmann, établit une relation entre les coefficients  $[x^n](q(x))$  et les coefficients  $[x^{n-1}] \left( \left( \frac{x}{p(x)} \right)^n \right)$  pour  $q(x)$  la réversion d'une série  $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$  avec  $\alpha_1 \neq 0$ .

THÉORÈME 1. Soient  $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$  une série formelle sans terme constant telle que  $\alpha_1 \neq 0$ , et  $q(x)$  la série du même type telle que  $q \circ p(x) = p \circ q(x) = x$ . Alors

$$n[x^n](q^k(x)) = k[x^{n-k}] \left( \left( \frac{x}{p(x)} \right)^n \right)$$

pour tous  $n, k \in \mathbf{Z}$ .

Démonstration (d'après [11]). Considérons une série de Laurent formelle  $g(x)$  et la série de Laurent

$$g \circ q(x) = \sum_{j \geq N} \gamma_j x^j.$$

Nous obtenons d'abord

$$g \circ q \circ p(x) = g(x) = \sum_{j \geq N} \gamma_j p^j(x)$$

en composant avec  $p(x)$  à la source, puis, pour  $n \in \mathbf{Z}$  arbitraire,

$$(*) \quad g(x) \frac{p'(x)}{p^{n+1}(x)} = \sum_{j \geq N} \gamma_j p^{j-n-1}(x) p'(x)$$

en multipliant par  $p'(x)/p^{n+1}(x)$ .



Nous allons appliquer deux règles de calcul très simples pour le calcul des résidus. La première concerne les dérivées :  $[x^{-1}](h'(x)) = 0$  pour toute série de Laurent formelle  $h(x)$  ; en particulier,

$$[x^{-1}](p^{j-n-1}(x)p'(x)) = [x^{-1}]\left(\frac{d}{dx} \frac{p^{j-n}(x)}{j-n}\right) = 0$$

pour  $j \neq n$ . La seconde concerne les dérivées logarithmiques :  $[x^{-1}]\left(\frac{h'(x)}{h(x)}\right) = 1$  pour toute série de puissance de la forme  $h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j x^j$  avec  $\delta_1 \neq 0$ .

En égalant les résidus des deux membres de (\*), nous trouvons donc

$$(**) \quad [x^{-1}]\left(g(x) \frac{p'(x)}{p^{n+1}(x)}\right) = [x^{-1}]\left(\gamma_n \frac{p'(x)}{p(x)}\right) = \gamma_n.$$

Comme le résidu de la série de Laurent  $\frac{1}{n}(g/p^{-n})'(x) = \frac{g'(x)}{np^n(x)} - \frac{g(x)p'(x)}{p^{n+1}(x)}$  est nul, nous avons aussi

$$(***) \quad n[x^n](g \circ q(x)) = n\gamma_n = [x^{-1}]\left(\frac{g'(x)}{p^n(x)}\right).$$

En particulier, lorsque  $g(x) = x^k$ , nous avons

$$[x^{-1}]\left(\frac{kx^{k-1}}{p^n(x)}\right) = [x^{n-k}]\left(\frac{kx^n}{p^n(x)}\right)$$

et le théorème résulte de ce cas de l'égalité (\*\*\*) .  $\square$

REMARQUES. (i) Plus généralement, la formule (\*\*\*) fournit le  $n$ -ième terme de la série de Laurent  $g \circ q(x)$  pour tout  $n \neq 0$ , et la formule (\*\*) pour  $n = 0$  s'écrit

$$[x^0](g \circ q(x)) = [x^{-1}]\left(g(x) \frac{p'(x)}{p(x)}\right).$$

(ii) Si les coefficients sont complexes et si le rayon de convergence de la série  $p(x)$  est strictement positif, alors il en est de même de celui de  $q(x)$ .

(iii) D'un point de vue numérique, la série de von Neumann  $(\mathcal{J} - H)^{\langle -1 \rangle} = \mathcal{J} + H \circ (\mathcal{J} + H \circ (\mathcal{J} + \dots))$  permet de calculer efficacement la réciproque  $(\mathcal{J} - H)^{\langle -1 \rangle}$  d'une perturbation  $H$  d'ordre  $> 1$  de l'identité  $\mathcal{J}$  en un nombre quelconque de variables. Cette formule est l'analogie compositionnelle de la règle de Horner :  $1 + H(1 + H(1 + \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} H^n$  qui converge vers  $\frac{1}{1-H}$  pour  $H$  petit.

EXEMPLES. Le théorème 1 ne s'applique bien au calcul des coefficients de  $q$  que s'il est facile de déterminer les coefficients de  $\left(\frac{x}{p(x)}\right)^n$ .

(i) Si  $p(x) = \frac{x}{1+x}$ , alors  $\frac{x}{p(x)} = 1+x$  et le théorème 1 implique  $[x^n](q(x)) = 1$  pour tout  $n \geq 1$ , en accord avec les égalités  $q(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ . (Notons que les deux séries  $p(x)$  et  $q(x)$  convergent dans le disque unité.)

(ii) Si  $p(x) = xe^{-x}$ , on obtient sans peine  $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n$ . (Notons que, dans ce cas, le rayon de convergence de  $p(x)$  est infini et celui de  $q$  est  $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^n}$ .)

(iii) De manière analogue,  $p(x) = xe^{-x^2}$  donne  $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)^{j-1}}{j!} x^{2j+1}$ . (Le rayon de convergence de  $p(x)$  est de nouveau infini tandis que la série de  $q(x)$  converge absolument pour  $|x| < 1/\sqrt{2e}$ .)

(iv) Comme déjà mentionné, la formule d'inversion de Lagrange-Bürmann n'est que rarement utile pour la réversion d'une série formelle. Des méthodes différentes sont généralement beaucoup plus simples. Un tel exemple est la fonction  $p(x^2) = (\sin x)^2$ ; voir la page 130 de [21]. Nous ne savons pas utiliser la formule de Lagrange pour prouver que la réversion de  $p(x)$  est donnée par la fonction hypergéométrique  $q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2j-1} \frac{x^j}{j^2 \binom{2j}{j}}$ . Un calcul facile montre cependant que  $q(x)$  est une solution (formelle) de l'équation différentielle

$$(x^2 - x)y'' + (x - \frac{1}{2})y' + \frac{1}{2} = 0.$$

En dérivant  $q(\sin^2(\sqrt{z})) = z$  par rapport à  $z$  et en posant  $x = \sin^2 \sqrt{z}$ , nous trouvons

$$q'(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

et ensuite

$$q''(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \left( 1 - (1-2x) \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \right).$$

Ceci montre que  $q(x)$  est également solution de l'équation différentielle ci-dessus. Un développement à l'ordre deux des deux séries permet de conclure.

Les deux théorèmes qui suivent fournissent d'autres paires du type  $(p(x), q(x))$ . L'aspect peut-être original de notre exposition consiste à faire jouer un rôle important aux polynômes  $P_j$  (et plus bas aux polynômes  $Q_j$ ), que nous voyons comme des *développements limités* des séries correspondantes.

Si  $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$  est une série entière et  $k$  un entier positif, nous notons  $[s(x)]_k = s_0 + s_1 x + \dots + s_{k-1} x^{k-1}$  son développement limité à l'ordre  $k-1$ .

Considérons une série formelle  $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$  telle que  $s_0 \neq 0$ . Définissons successivement

- les polynômes

$$P_1(x) = s_0, \quad P_2(x) = s_0^2 + s_0 s_1 x, \\ P_3(x) = s_0^3 + (s_0^2 s_1 + s_0 s_1 s_0) x + (s_0^2 s_2 + s_0 s_1^2) x^2, \dots$$

définis récursivement par  $P_k(x) = [P_{k-1}(x)s(x)]_k$  ;

- les constantes  $Q_n(0) = [x^{n-1}]P_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , obtenues en considérant les coefficients de plus hauts degrés dans les polynômes  $P_1(x), P_2(x), \dots$ , où  $P_n(x)$  est considéré comme étant de degré  $n-1$  ;
- la série génératrice

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0) t^n$$

des nombres  $Q_n(0)$ .

**THÉORÈME 2.** *La série formelle  $q(t)$  associée comme ci-dessus à  $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$  vérifie*

$$q(t) = ts(q(t)).$$

En posant  $p(x) = x/s(x)$ , on retrouve deux séries  $p(x), q(x)$  telles que

$$p(q(t)) = \frac{q(t)}{s(q(t))} = \frac{ts(q(t))}{s(q(t))} = t.$$

Avec ces nouvelles notations, le théorème 1 s'écrit comme suit :

**THÉORÈME 3.** *Si  $q(t) = ts(q(t))$ , alors*

$$q(t)^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} t^n \frac{k+1}{n} [x^{n-k-1}] (s(x)^n)$$

pour tout  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  et, en particulier,

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} [x^{n-1}] (s(x)^n).$$

Nous offrons au chapitre 7 une autre preuve des théorèmes 2 et 3 (bien que ce dernier ne soit rien d'autre qu'une reformulation du théorème 1). Cette preuve, de nature combinatoire, n'est pas nouvelle. Elle consiste à interpréter les mots de Łukasiewicz comme des arbres plans enracinés.

3. LA TRANSFORMÉE INVERSE

Le but de ce chapitre est de décrire quelques aspects du groupe multiplicatif constitué des séries formelles du type  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$  avec  $s_0 \neq 0$ . Rappelons qu'une telle série définit une suite de polynômes  $P_1(x) = s_0, \dots, P_k(x) = [P_{k-1}(x)s(x)]_k, \dots$ , où  $P_k(x)$  est le développement limité à l'ordre  $k - 1$  de la série formelle  $P_{k-1}(x)s(x)$ . Introduisons maintenant les polynômes miroir  $Q_n(x) = x^{n-1}P_n(1/x)$  et désignons par  $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n$  la série génératrice associée à la suite des évaluations  $Q_1(0), Q_2(0), \dots$ .

Le résultat suivant exprime la série génératrice complète  $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)t^n$  en fonction de  $q(t)$  :

THÉORÈME 4. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)t^n = \frac{q(t)}{1 - xq(t)}.$$

Ce théorème sera démontré au chapitre 7. La preuve consiste à identifier les monômes contribuant aux coefficients de  $q(t)$  avec les mots de Łukasiewicz.

Nous décrivons maintenant une interprétation en termes de "transformée inverse continue" de cette égalité. Cette interprétation suggère une jolie propriété des transformées de Hankel (décalées) de la série  $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ , qui sera énoncée au chapitre 6 et qui constitue le résultat principal dans cet article.

Soit  $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \dots$  une série génératrice. Introduisons l'application  $I[a(t)] = a(t)/(1 + ta(t))$  appelée *transformée inverse* puisque  $(1 + ta(t))(1 - tI[a(t)]) = 1$ . Par itération, on obtient  $I^x[a(t)] = a(t)/(1 + xta(t))$ , ce qui permet d'interpoler les itérées

$$I^x(a(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(x) t^k$$

de la transformée inverse. Le  $k$ -ième terme  $I_k(x)$  de la suite

$$I_0(x) = a_0, I_1(x) = a_1 - a_0^2x, I_2(x) = a_2 - 2a_0a_1x + a_0^3x^2, \dots$$

est alors un polynôme de degré  $k$  en  $x$ .

Posons  $a(t) = \frac{q(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n$ . Le théorème 4 s'énonce aussi sous la forme

$$I^x \left[ \frac{q(t)}{t} \right] = \frac{1}{t} \frac{q(t)}{1 + xq(t)} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x) t^n.$$

Autrement dit, on a :  $t I^x[t^{-1}Q(0)] = Q(-x)$  pour  $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) t^n$ .

REMARQUE. On aurait tout aussi bien pu définir la transformée de Hankel de  $a(t)$  par la formule  $\tilde{I}[a(t)] = a(t)/(1 - ta(t)) = -I[-a(t)]$ .

REMARQUE. Un phénomène similaire d'interpolation continue se produit également pour la composition itérée  $f^{\circ k} = f \circ f \circ \dots \circ f$  d'une série formelle  $f(t) = t + \sum_{i=2}^{\infty} a_i t^i$  dont le développement à l'ordre 1 est l'identité; ceci se généralise d'ailleurs facilement à un  $d$ -uplet de séries formelles  $F(t_1, \dots, t_d) = (f_1(t_1, \dots, t_d), \dots, f_d(t_1, \dots, t_d))$ . Il existe alors une suite

$$C_1(x) = 1, \quad C_2(x) = a_2 x, \quad C_3(x) = (a_2^2(x-1) + a_3)x,$$

$$C_4(x) = (((2x-3)a_2^3 + 5a_2 a_3)(x-1) + 2a_4)x/2, \dots$$

avec  $C_n(x)$  un polynôme de degré  $\leq n-1$  en  $x$  tel que  $f^{\circ x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(x)t^i$ .

Pour le démontrer on peut considérer la différence finie

$$C_n(k+1) - C_n(k) = \text{coefficient de } t^n \text{ dans } \sum_{i=2}^{\infty} a_i \left( \sum_{j=1}^{\infty} C_j(k)t^j \right)^i,$$

qui est un polynôme de degré au plus  $n-2$  en  $k$  (par récurrence sur  $n$ ). On peut également le déduire en utilisant un isomorphisme de monoïdes entre le monoïde des séries formelles sans terme constant (avec la composition des séries comme produit) et un groupe de matrices triangulaires supérieures. Un tel isomorphisme peut être donné par

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

où  $\sum_{j=k}^{\infty} a_{k,j} x^j = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^k$ ; voir par exemple le théorème 1.7a dans [10].

#### 4. EXEMPLES

Revenons aux exemples (i) et (ii) du chapitre 2.

EXEMPLE TRIVIAL. Considérons la série formelle  $s$  définie par le polynôme  $1+x$ . On vérifie facilement que  $P_n(x) = Q_n(x) = (1+x)^{n-1}$  et  $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$ . Les théorèmes 1, 2 et 3 se réduisent alors à des identités triviales et au théorème binomial, à savoir

$$\frac{t}{1-t(1+x)} = \frac{t/(1-t)}{1-xt/(1-t)}, \quad \frac{t/(1-t)}{1+t/(1-t)} = t$$

et

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k+1}{n} \binom{n}{k+1} t^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^{n+1}.$$

La transformée inverse de  $q(t)/t$  est donnée par  $I\left(\frac{q(t)}{t}\right) = \frac{1/(1-t)}{1+t/(1-t)} = 1$  et nous avons

$$\begin{aligned} I^x\left(\frac{q(t)}{t}\right) &= \frac{1/(1-t)}{1+xt/(1-t)} = \frac{1}{1-t(1-x)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-x))^{n-1} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x)t^n, \end{aligned}$$

en accord avec les résultats du chapitre 3.

L'EXEMPLE DE L'EXPONENTIELLE. Pour la série  $s(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  définissant l'exponentielle, nous avons

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n (n-j) \frac{(nx)^j}{j!}.$$

En effet, cette formule donne bien  $P_1 = 1$  et le calcul

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^k (n-j) \frac{n^j}{j! (k-j)!} &= \frac{1}{n} \frac{1}{k!} (n(n+1)^k - nk(n+1)^{k-1}) \\ &= \frac{1}{n+1} (n+1-k) \frac{(n+1)^k}{k!} \end{aligned}$$

du coefficient  $x^k$ ,  $0 \leq k \leq n$  dans  $P_n(x)e^x$  la montre par récurrence. Nous obtenons ainsi

$$Q_n(x) = \sum_{j=1}^n j n^{n-1-j} \frac{x^{j-1}}{(n-j)!}$$

et

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(nt)^n}{n!},$$

en accord avec le théorème 3. Le théorème 4 implique les égalités

$$(k+1)(n-k)n^{n-2-k} = k \sum_{m=k}^{n-1} \binom{n-k}{n-m} m^{m-1-k} (n-m)^{n-m-1}$$

pour tous les entiers  $n, k$  tels que  $n > k > 1$ . Pour finir, mentionnons la jolie évaluation

$$P_n(1) = Q_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n (n-j) \frac{n^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{n^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} = \frac{n^n}{n!}.$$

## 5. INTERPOLATION ENTRE INVERSION ET RÉVERSION D'UNE SÉRIE FORMELLE

L'anneau  $\mathbf{C}[[x]]$  des séries formelles est un anneau commutatif local dont l'idéal maximal  $\mathfrak{m} = x\mathbf{C}[[x]]$  est l'ensemble des séries formelles sans terme constant. Notons

$$\mathcal{U} = \mathbf{C}[[x]] \setminus \mathfrak{m} = \mathbf{C}^* + \mathfrak{m}$$

le groupe multiplicatif formé des éléments inversibles de  $\mathbf{C}[[x]]$  et  $S\mathcal{U} = 1 + \mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$  le sous-groupe des séries formelles de coefficient constant 1. Notons

$$\mathcal{D} = \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x^j \in \mathbf{C}[[x]] \mid \alpha_1 \neq 0 \right\}$$

le groupe non-commutatif des séries formelles pour la composition. On a  $\mathcal{D} = x\mathcal{U}$  en tant qu'ensemble et  $S\mathcal{D} = xS\mathcal{U} = x + \mathfrak{m}^2$  peut être interprété comme le sous-groupe des "difféomorphismes locaux formels tangents à l'identité en 0".

Le but de ce chapitre est de décrire une déformation naturelle continue (qui est holomorphe pour des séries holomorphes) entre le groupe multiplicatif commutatif  $S\mathcal{U}$  et le groupe non-commutatif  $S\mathcal{D}$  (identifié à  $S\mathcal{U}$  via la bijection ensembliste  $A \rightarrow xA$  de  $S\mathcal{U}$  sur  $S\mathcal{D}$ ).

L'action naturelle  $\alpha \cdot A = A \circ \alpha$  de  $\alpha \in \mathcal{D}$  sur un élément  $A \in \mathbf{C}[[x]]$  agit par automorphismes sur  $\mathcal{U}$  et  $S\mathcal{U}$  et on peut donc former le produit semi-direct  $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$  qui est un groupe pour la loi de composition

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (C, \gamma) = (A(B \circ \alpha), \beta \circ \alpha)$$

où  $C = A(B \circ \alpha)$  est le produit de la série  $A$  avec la série  $B \circ \alpha$ . L'élément inverse  $(A, \alpha)^{-1}$  de  $(A, \alpha)$  est donné par

$$(A, \alpha)^{-1} = \left( \frac{1}{A \circ \alpha^{(-1)}}, \alpha^{(-1)} \right),$$

où la réversion (ou série réciproque)  $\alpha^{(-1)}$  de  $\alpha \in \mathcal{D}$  est définie par l'identité  $\alpha \circ \alpha^{(-1)} = \alpha^{(-1)} \circ \alpha = x$ . On a les homomorphismes  $A \mapsto (A, x)$  et  $(A, \alpha) \mapsto \alpha$  (avec section  $\alpha \mapsto (1, \alpha)$ ) provenant de la suite exacte scindée évidente

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 1.$$

Notons  $S\mathcal{I} = S\mathcal{U} \rtimes S\mathcal{D}$  le noyau  $\text{Ker}(\psi)$  de l'homomorphisme de groupes  $\psi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$  défini par  $\psi(A, \alpha) = (A(0), \alpha'(0))$ .

REMARQUE. (i) Le groupe  $\mathcal{I}$  peut se généraliser facilement en considérant le produit semi-direct  $U \rtimes D$  où  $U$  est un groupe de germes de fonctions inversibles au voisinage d'un point  $P \in X$  avec  $X$  un espace topologique et où  $D$  est un groupe de germes d'homéomorphismes avec point fixe  $X$ . En particulier, on peut, au moins formellement, remplacer le groupe multiplicatif  $\mathcal{U}$  par le groupe multiplicatif des séries de Laurent non-nulles.

(ii) Le noyau  $S\mathcal{I} = \text{Ker}(\psi) = S\mathcal{U} \rtimes S\mathcal{D}$  est contractile pour une topologie raisonnable sur  $\mathbf{C}[[x]]$  (obtenue par exemple en considérant la convergence coefficient par coefficient). On a donc  $\pi_1(\mathcal{I}) = \pi_1(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*) = \mathbf{Z}^2$  pour le groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{I})$  et on peut considérer l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 1$$

définissant le revêtement universel  $\tilde{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{I}$ , obtenu en relevant l'extrémité des chemins continus issus du neutre  $(1, x) \in \mathcal{I}$  ou, de manière équivalente, en considérant des relèvements réels des arguments de  $A(0), \alpha'(0) \in \mathbf{C}^*$  pour  $(A, \alpha) \in \mathcal{I}$ .

(iii) Le groupe abstrait  $\mathcal{I}$  est isomorphe à un "sous-groupe de Lie" dans les matrices triangulaires inférieures infinies, voir [1].

Pour la description de l'interpolation entre le groupe multiplicatif  $\mathcal{U}$  et le groupe non-commutatif  $\mathcal{D}$  il faut soit se restreindre au sous-groupe  $S\mathcal{I} = S\mathcal{U} \rtimes S\mathcal{D} = \text{Ker}(\psi)$  qu'on pourrait appeler le *groupe d'interpolation spécial*, soit travailler dans un groupe intermédiaire entre  $\mathcal{I}$  et son revêtement universel  $\tilde{\mathcal{I}}$ . Nous allons décrire en détail le premier cas. Le deuxième cas est traité brièvement dans [1].



Pour  $\tau \in \mathbf{C}$ , introduisons le sous-ensemble

$$SG(\tau) = \{(A, xA^\tau) \mid A \in SU = 1 + x\mathbf{C}[[x]]\} \subset SI$$

où l'on choisit l'unique détermination "continue" du logarithme des séries formelles de manière à avoir  $A^\tau = e^{\tau \log A} \in SU = 1 + x\mathbf{C}[[x]]$  pour  $A \in SU$ .

PROPOSITION 1. (i) L'ensemble  $SG(\tau)$  est un sous-groupe pour tout  $\tau \in \mathbf{C}$ .

(ii) Le groupe  $SG(0)$  est isomorphe au groupe commutatif  $SU$ .

(iii) Pour  $\tau \neq 0$  les groupes  $SG(\tau)$  sont tous isomorphes au groupe non-commutatif  $SD$ . Un isomorphisme est donné par  $\alpha \mapsto ((\frac{\alpha}{x})^{1/\tau}, \alpha) \in SG(\tau)$  pour  $\alpha \in SD$ .

COROLLAIRE 1. Pour  $\tau \in [0, 1]$ , l'application

$$\tau \mapsto \frac{1}{A \circ (xA^\tau)^{\langle -1 \rangle}}$$

est une déformation continue reliant l'inverse multiplicatif  $\frac{1}{A}$  de  $A \in SU$  à la série réciproque  $\frac{x}{A \circ (xA)^{\langle -1 \rangle}} = (xA)^{\langle -1 \rangle}$  de  $(xA) \in SD$ .

*Idée de la preuve de la proposition 1.* L'assertion (ii) est évidente. Un petit calcul montre que l'application  $(A, \alpha) \mapsto (A (\frac{\alpha}{x})^\lambda, \alpha)$  est un automorphisme de  $SI$ . En considérant  $\lambda = \tau^{-1}$ , on démontre facilement l'assertion (iii). L'affirmation (i) est maintenant triviale.  $\square$

REMARQUE. Une deuxième bijection naturelle entre  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{D}$  est donnée par  $\alpha \in \mathcal{D} \mapsto \alpha' \in \mathcal{U}$ . L'application

$$\tau \mapsto \frac{1}{A \circ (\int_0 A^\tau)^{\langle -1 \rangle}}$$

(provenant de l'automorphisme  $(A, \alpha) \mapsto (A(\alpha')^\lambda, \alpha)$  de  $SI$ ) permet d'interpoler entre  $\frac{1}{A}$  et la série réciproque

$$\left(\int_0 A\right)^{\langle -1 \rangle} = \int_0 \frac{1}{A \circ (\int_0 A)^{\langle -1 \rangle}}$$

de  $\int_0 A \in SD$  associée à cette deuxième bijection, voir [1].

6. LA TRANSFORMÉE DE HANKEL

Ce chapitre contient notre résultat principal, suggéré par le théorème 4 du chapitre 3.

La  $n$ -ième *matrice de Hankel*  $H(n)$  d'une suite  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  est la matrice symétrique dont les coefficients  $h_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j < n$  ne dépendent que de la somme  $i + j$  des indices et sont donnés par  $h_{i,j} = s_{i+j}$ . La matrice  $H(n)$  dépend donc seulement de  $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}$ . La *transformée de Hankel* de  $s$  est alors définie comme étant la suite

$$\det(H(1)) = s_0, \quad \det(H(2)) = s_0s_2 - s_1^2, \quad \det(H(3)), \dots$$

des déterminants des matrices de Hankel d'ordre  $1, 2, 3, \dots$  associées à  $s$ .

Une formule de Hadamard (voir [7], page 30, voir aussi [14]) implique que deux suites  $a$  et  $b = I(a)$  dont les séries génératrices sont reliées par la transformation inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) / (1 + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)$ , ont même transformée de Hankel. Comme les polynômes  $I_n(x)$  interpolent les itérées de la transformée inverse, la transformée de Hankel de la suite  $I^x(a) = (I_0(x), I_1(x), I_2(x), \dots)$  ne dépend pas de  $x$ .

Pour un entier  $k > 0$ , définissons la  $k$ -ième transformée de Hankel de  $s = (s_0, s_1, \dots)$  comme la suite

$$(d_{k,n} = \det(H_k(n)))_{n=1,2,\dots} = (s_k, s_k s_{k+2} - s_{k+1}^2, \dots)$$

où  $H_k(n) = (s_{i+j+k})_{0 \leq i, j < n}$  est la matrice de Hankel de taille  $n \times n$  associée à la suite décalée  $s_k, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots$ .

THÉORÈME 5. (i) *La suite*

$$\left( \det((I_{i+j+k}(x))_{0 \leq i, j < n}) \right)_{n=1,2,3,\dots}$$

de la  $k$ -ième transformée de Hankel de  $I^x(a) = (I_0(x), I_1(x), \dots)$  ne contient que des polynômes de degré  $\leq k$  en  $x$ .

(ii) *Le déterminant*

$$\det((Q_{1+i+j}(x))_{0 \leq i, j < n}),$$

pour  $Q_1, Q_2, \dots$  associés à  $s(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \dots$  comme dans le chapitre 3, ne dépend pas de  $s_1$ .

REMARQUE. L'identité de condensation de Dodgson (cf. [12]) montre que les déterminants  $d_{k,n}$  vérifient l'égalité

$$d_{k-1,n+1} d_{k+1,n-1} = d_{k-1,n} d_{k+1,n} - d_{k,n}^2,$$

où l'on a posé  $d_{k,0} = 1$  pour tout  $k$ . Cette identité est parfois utile pour calculer récursivement la transformée de Hankel  $(d_{0,n})_{n=1,2,\dots}$  à partir de  $d_{k,1} = s_k$ .

## 7. MOTS DE ŁUKASIEWICZ ET RÉVERSION DES SÉRIES (LAGRANGE)

Ce chapitre est dévolu à l'étude des mots de Łukasiewicz. Les propriétés de ces mots sont ensuite exploitées pour démontrer les théorèmes 2, 3 et 4. Nous commençons par démontrer le théorème 4, qui équivaut à l'identité

$$[x^k] \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)t^n = q(t)^{k+1}.$$

Soit

$$s(x) = s_0 + \sum_{j=1}^{\infty} s_j x^j$$

une série formelle dont les coefficients  $s_0, s_1, s_2, \dots$  sont des lettres qui ne commutent qu'avec la variable  $x$ . Comme au début, nous associons à  $s(x)$  la suite des polynômes

$$\begin{aligned} P_1(x) &= s_0, & P_2(x) &= s_0^2 + s_0 s_1 x, \\ P_3(x) &= s_0^3 + (s_0^2 s_1 + s_0 s_1 s_0)x + (s_0^2 s_2 + s_0 s_1^2)x^2, \dots \end{aligned}$$

définie de façon récursive par  $P_k(x) = [P_{k-1}(x)s(x)]_k$ . Notons  $[x^k]P_n(x)$  le coefficient de  $x^k$  du polynôme  $P_n(x)$ . On a une bijection entre les monômes de  $[x^k]P_n(x)$  et les chemins sur  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  de  $(0,0)$  à  $(n,k)$  ne traversant pas la diagonale  $y = x$  et qui n'utilisent que des pas  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  orientés vers le nord ou vers l'est. En effet, associons à  $s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_n}$  le chemin

$$i_1 \times (0,1) + (1,0) + i_2 \times (0,1) + (1,0) + i_3 \times (0,1) + (1,0) + \dots + i_n \times (0,1) + (1,0)$$

(on a toujours  $i_1 = 0$ ). En particulier, le nombre de tels monômes contribuant au coefficient  $[x^{n-1}]P_n(x)$  de plus haut degré est donné par le nombre de Catalan  $C_{n-1} = \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{1}{n}$ . Posons  $Q_n(x) = x^{n-1} \bar{P}_n(1/x)$  où  $\bar{P}_n(x)$  est obtenu en lisant à l'envers les monômes contribuant aux coefficients  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  de  $P_n(x)$  :

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= s_0, & Q_2(x) &= s_0^2 x + s_1 s_0, \\ Q_3(x) &= s_0^3 x^2 + (s_1 s_0^2 + s_0 s_1 s_0)x + s_2 s_0^2 + s_1^2 s_0, \dots \end{aligned}$$

Munissons la lettre  $s_i$  du poids  $w(s_i) = i - 1$  et posons

$$w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_n}) = w(s_{i_1}) + w(s_{i_2}) + w(s_{i_3}) + \dots + w(s_{i_n})$$

pour un mot  $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_n}$  de longueur  $n$ . Représentons un mot  $s_{i_1}\dots s_{i_n}$  apparaissant dans  $Q_n(x)$  par le chemin de sommets

$$(0, 0), (1, s_{i_1} - 1), (2, s_{i_1} + s_{i_2} - 2), \dots, (n, -n + \sum_{j=1}^n i_j) = (n, w(s_{i_1}\dots s_{i_n}))$$

obtenu en concaténant les pas  $(1, w(s_{i_j})) = (1, i_j - 1)$  associés à  $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}$ .

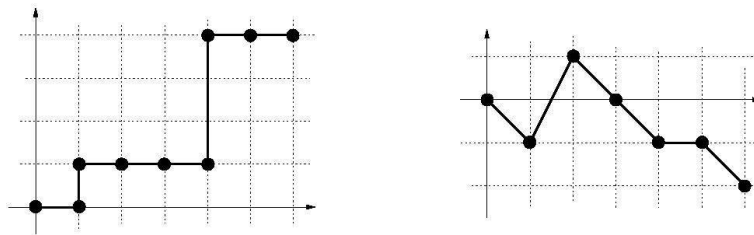


FIGURE 1

Le chemin associé au mot  $s_0s_1s_0s_0s_3s_0$  (dans  $P_6(x)$ )  
et à son miroir  $s_0s_3s_0s_0s_1s_0$  (dans  $Q_6(x)$ ).

Les mots qui apparaissent dans  $Q_n(0) = [x^0]Q_n(x)$  sont les mots de Łukasiewicz (voir [3]). Leur série génératrice est donnée par  $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n$ . Remarquons que les mots de Łukasiewicz de  $Q_{n+1}(0)$  sont en bijection avec les parenthésages de longueur  $2n$  comportant  $n$  parenthèses ouvrantes et fermantes. Pour le voir on commence par supprimer la dernière lettre  $s_0$  d'un mot de Łukasiewicz et on remplace ensuite une lettre  $s_k$  par le mot de longueur  $k + 1$  consistant en  $k$  parenthèses ouvrantes “((... (” suivi d’une parenthèse fermante “)”. Pour le mot de Łukasiewicz  $s_2s_0s_1s_2s_2s_0s_0$  on obtient ainsi

$$\begin{matrix} s_2 & s_0 & s_1 & s_2 & s_2 & s_0 & s_0 \\ ( & ) & ( & ( & ( & ) & ) \end{matrix}$$

LEMME 1. *Le coefficient  $[x^k]Q_n(x)$  de  $Q_n(x)$  est la somme de tous les mots  $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_n}$  de longueur  $n$  et de poids*

$$w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j - n = -(k + 1)$$

tels que  $w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_h}) \geq -k$  pour tout  $h < n$ .

*Preuve.* Le coefficient  $[x^k]P_n(x)$  est constitué de tous les mots  $s_{i_1} \dots s_{i_n}$ ,  $\sum_{j=1}^n i_j = k$ , qui vérifient les inégalités  $\sum_{j=1}^l i_j \leq l - 1$  pour  $l = 1, \dots, n$ .

Le miroir  $s_{i_n} \dots s_{i_1}$  de poids  $w(s_{i_n} \dots s_{i_1}) = \sum_{j=1}^n (i_j - 1) = -(n - k)$  d'un tel mot contribue au coefficient  $[x^{n-1-k}]Q_n(x)$ . Nous avons

$$w(s_{i_n} \dots s_{i_{n+1-h}}) = -h + \sum_{j=n+1-h}^n i_j = -h + k - \sum_{j=1}^{n-h} i_j.$$

En utilisant la majoration  $\sum_{j=1}^{n-h} i_j \leq n - h - 1$  rencontrée ci-dessus, nous avons pour  $h < n$

$$w(s_{i_n} \dots s_{i_{n+1-h}}) \geq -h + k - (n - 1 - h) > -(n - k). \quad \square$$

*Preuve du théorème 4.* Soit  $s_{i_1} \dots s_{i_n}$  un mot de longueur  $n$  et de poids  $w(s_{i_1} \dots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j - n = -(k + 1)$  contribuant au coefficient  $[x^k]Q_n(x)$  de  $Q_n$ . Un tel mot s'écrit de manière unique sous la forme  $s_{i_1} \dots s_{i_n} = l_0 \dots l_k$  où les mots  $l_0, \dots, l_k$  sont des mots de Łukasiewicz en  $s_0, s_1, s_2, \dots$  (voir la remarque ci-dessous pour un exemple). En effet, soit  $a \geq 1$  le plus petit indice tel que  $w(s_{i_1} \dots s_{i_a}) = -1$ . Le mot  $l_0 = s_{i_1} \dots s_{i_a}$  satisfait alors les conditions du lemme 1 avec  $k = 0$ . C'est donc un mot de Łukasiewicz. De plus, c'est le seul sous-mot initial de  $s_{i_1} \dots s_{i_n}$  qui soit de Łukasiewicz car un sous-mot initial de la forme  $s_{i_1} \dots s_{i_b}$  avec  $b < a$  est de poids  $w(s_{i_1} \dots s_{i_b}) \geq 0$ . D'autre part, un tel mot avec  $b > a$  ne peut à la fois être de poids  $-1$  et vérifier les conditions du lemme 1.

Si  $k = 0$ , le lemme 1 implique que  $a = n$ . Pour  $k > 0$ , on a  $a < n$  et le complément  $s_{i_{a+1}} \dots s_{i_n}$  est un mot de poids  $-k$  vérifiant de nouveau les conditions du lemme 1. Par récurrence sur  $k$ , on a alors  $s_{i_{a+1}} \dots s_{i_n} = l_1 \dots l_k$  avec  $l_1, \dots, l_k$  des mots de Łukasiewicz. Ceci montre que l'ensemble des mots formant le coefficient  $[x^k]Q_n(x)$  est l'ensemble des mots de longueur  $n$  en  $s_0, s_1, \dots$  obtenus en concaténant  $(k + 1)$  mots de Łukasiewicz. On a donc l'égalité  $[x^k]Q_n(x) = [t^n]q(t)^{k+1}$ .  $\square$

REMARQUE. La factorisation  $s_{i_1} \dots s_{i_n} = l_0 \dots l_k$  d'un mot de poids  $-(k + 1)$  satisfaisant les conditions du lemme 1 en  $(k + 1)$  mots de Łukasiewicz est bien visible sur la représentation graphique introduite ci-dessus. Ainsi, pour le mot  $s_0 s_3 s_0 s_0 s_1 s_0$  contribuant au coefficient  $x^{5-(0+3+0+0+1+0)} = x$  de  $Q_6(x)$ , on obtient  $l_0 = s_0$  et  $l_1 = s_3 s_0 s_0 s_1 s_0$ .

*Preuve du théorème 2.* Soit  $s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_n}$  un mot de Łukasiewicz. Si  $n = 1$ , alors le mot est égal à  $s_0$ . Si  $n \geq 2$ , alors  $i_1 \geq 1$  et  $s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_n}$  est un monôme de  $[x^{i_1-1}]Q_{n-1}(x)$ . Il se factorise donc en  $i_1$  facteurs de Łukasiewicz.

Ceci suggère de considérer la bijection suivante entre les mots de Łukasiewicz et les arbres plans enracinés : Au mot de Łukasiewicz  $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3} \dots s_{i_n}$  on fait correspondre l'arbre plan de  $n$  sommets muni d'une racine de degré  $i_1$ . Les  $i_1$  fils de la racine correspondent récursivement aux  $i_1$  facteurs de Łukasiewicz du mot  $s_{i_2}s_{i_3} \dots s_{i_n}$ . Cette bijection se traduit par l'identité  $q(t) = ts(q(t))$  pour les séries génératrices.  $\square$

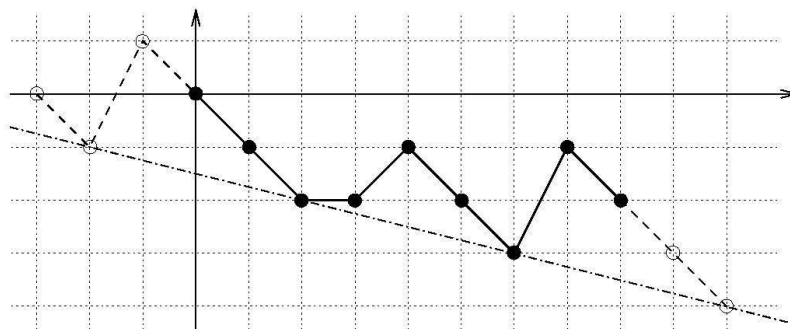


FIGURE 2

Le mot  $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$ , rendu cyclique.

*Preuve du théorème 3.* Le coefficient  $[x^{n-k-1}]s(x)^n$  compte tous les mots  $s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_n}$  de longueur  $n$  qui sont de poids  $w(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j - n = (n - k - 1) - n = -(k + 1)$ . Ainsi le mot  $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$  apparaissant dans  $[x^6]s(x)^8$  est de longueur 8 et de poids  $-2$  et illustre le cas particulier  $n = 8$  et  $k = 1$ . Associons à un tel mot la suite  $n$ -périodique (bi-infinie) de lettres  $\dots s_{i_{-2}}s_{i_{-1}}s_{i_0}s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_n}s_{i_{n+1}}s_{i_{n+2}} \dots$  avec  $s_{i_{n+h}} = s_{i_h}$  pour tout  $h \in \mathbf{Z}$ . Regardons la représentation graphique, c'est-à-dire la suite infinie de points

$$\begin{aligned} & \dots, (-2, -w(s_{i_{-1}}s_{i_0})), (-1, -w(s_{i_0})), (0, 0), (1, w(s_{i_1})), \\ & (2, w(s_{i_1}s_{i_2})), \dots, (n, w(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_n})) = (n, -(k + 1)), \\ & (n + 1, w(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_{n+1}})) = (n + 1, -(k + 1) + w(s_{i_1})), \\ & (n + 2, w(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_{n+2}})) = (n + 2, -(k + 1) + w(s_{i_1}s_{i_2})), \dots \end{aligned}$$

La suite des produits scalaires de ces points avec le vecteur  $(k + 1, n)$  est périodique et la longueur de la période est un diviseur de  $n$ . Supposons que la valeur minimale de ces produits scalaires est prise sur le point  $(h, w(s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_h}))$  avec  $h \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Par ailleurs,  $h$  est unique (modulo  $n$ ) si  $k = 0$ . De toute façon, le mot  $s_{i_{n+1}}s_{i_{n+2}} \dots s_{i_n}s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_h}$  apparaît dans  $[x^k]Q_n(x)$ . On appelle ce mot un *réarrangement cyclique* de  $s_{i_1}s_{i_2} \dots s_{i_n}$ .

D'après la démonstration du théorème 1, ce réarrangement cyclique a une factorisation canonique en  $k+1$  mots de Łukasiewicz. Parmi les  $n$  réarrangements cycliques possibles de  $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_n}$  il y en a donc exactement  $(k+1)$  qui apparaissent dans  $[x^k]Q_n(x)$  : les  $(k+1)$  réarrangements cycliques des facteurs de Łukasiewicz de  $s_{i_{h+1}}s_{i_{h+2}}\dots s_{i_n}s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_h}$ . En effet, si l'on choisit un réarrangement cyclique dont la première lettre n'est pas la première lettre d'un facteur de Łukasiewicz, alors l'inégalité nécessaire pour l'appartenance à  $[x^k]Q_n(x)$  n'est pas satisfaite pour le mot qui va jusqu'à la dernière lettre du facteur précédent.

Ainsi, pour notre exemple  $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$  représenté par la figure ci-dessus, les facteurs de Łukasiewicz du mot cyclique bi-infini sont délimités par les intersections du graphe représentant ce mot avec la droite  $4y = -6 - x$ , représentée en pointillé. Ses deux facteurs de Łukasiewicz sont donc  $s_1s_2s_0s_0$  et  $s_3s_0s_0s_0$ . Parmi les huit réarrangements circulaires du mot  $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$ , il n'y a donc que  $s_1s_2s_0s_0s_3s_0s_0s_0$  et  $s_3s_0s_0s_0s_1s_2s_0s_0$  qui apparaissent dans  $[x^1]Q_8(x)$ .

Dans le cas général, on obtient ainsi une bijection

$$\begin{aligned} \{1, \dots, k+1\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{mots en } s_0, s_1, \dots \\ \text{de longueur } n \text{ et de} \\ \text{poids } -(k+1) \end{array} \right\} \\ \longrightarrow \{1, \dots, n\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{produits de } (k+1) \text{ mots} \\ \text{de Łukasiewicz de longueur} \\ \text{totale } n \text{ en } s_0, s_1, \dots \end{array} \right\} \\ (k', \text{mot}) \longmapsto (n', \text{luk}), \end{aligned}$$

où  $\text{luk}$  est le réarrangement cyclique de  $\text{mot}$  qui appartient à  $[x^k]Q_n(x)$  et qui fait apparaître la première lettre de  $\text{mot}$  dans le  $k'$ -ième facteur de Łukasiewicz de  $\text{luk}$  ( $n'$  correspond à la nouvelle place de la première lettre de  $\text{mot}$ ). Cette bijection implique l'égalité

$$(k+1) [x^{n-k-1}]s(x)^n = n [t^n]q(t)^{k+1}. \quad \square$$

REMARQUE. Dans le contexte d'une variable  $t$  ne commutant pas avec les variables  $s_i$ , il faudrait introduire la variable  $t$  devant chaque lettre, i.e.

$$\begin{aligned} q(t) = ts_0 + ts_1ts_0 + ts_2(ts_0)^2 + (ts_1)^2ts_0 \\ + ts_3(ts_0)^3 + ts_2ts_1(ts_0)^2 + ts_2ts_0ts_1ts_0 + ts_1ts_2(ts_0)^2 + (ts_1)^3ts_0 + \dots \end{aligned}$$

La dernière lettre d'un mot de Łukasiewicz  $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_n}$  est toujours la lettre  $s_0$  (i.e.  $i_n = 0$ ). Comme  $w(s_1) = 0$ , le mot en les lettres  $s_0, s_2, s_3, \dots$  obtenu par suppression de toutes les lettres  $s_1$  dans un mot de Łukasiewicz est encore un mot de Łukasiewicz. Appelons-le mot *réduit* de Łukasiewicz et notons  $q_{s_1=0}(t)$  la série génératrice des mots réduits de Łukasiewicz. Nous avons alors le résultat suivant, utile au chapitre 8.

PROPOSITION 2. *On a l'égalité entre séries génératrices*

$$q(t) = q_{s_1=0}((1 - ts_1)^{-1} t).$$

*Preuve.* Un mot de Łukasiewicz  $l = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_n}$  qui ne contient pas la lettre  $s_1$ , est le mot réduit de Łukasiewicz pour tous les mots de Łukasiewicz de la forme  $s_1^{k_1}s_{i_1}s_1^{k_2}s_{i_2}s_1^{k_3}s_{i_3}\dots s_1^{k_n}s_{i_n}$  avec  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Le mot réduit  $l$  intervient avec une contribution de  $ts_{i_1}ts_{i_2}ts_{i_3}\dots ts_{i_n}$  dans la série génératrice  $q_{s_1=0}(t)$  des mots réduits. L'ensemble de tous les mots de Łukasiewicz dont  $l$  est le mot réduit contribue donc avec  $(1 - ts_1)^{-1}ts_{i_1}(1 - ts_1)^{-1}ts_{i_2}\dots(1 - ts_1)^{-1}ts_{i_n}$  à la série génératrice  $q(t)$  de tous les mots de Łukasiewicz.  $\square$

7.1 DIGRESSION: ARBRES BINAIRES RÉGULIERS, ARBRES PLANS ENRACINÉS ET MOTS DE ŁUKASIEWICZ

Un *arbre binaire régulier* est un arbre plan enraciné (modulo la relation d'équivalence évidente) dont tous les sommets ont zéro ou deux enfants. Notons  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des arbres binaires réguliers avec  $n + 1$  feuilles (et  $2n + 1$  sommets,  $2n$  arêtes) et  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des arbres plans enracinés ayant  $n + 1$  sommets (et  $n$  arêtes). Les deux ensembles  $\mathcal{B}_n, \mathcal{T}_n$  ont même cardinalité, donnée par le  $n$ -ième nombre de Catalan  $\binom{2n}{n}/(n + 1)$  (cf. par exemple l'exercice 6.19 d,e dans [18]). Une bijection entre ces deux ensembles finis peut être décrite comme suit: Un arbre binaire régulier  $B \in \mathcal{B}_n$  possède exactement  $n$  arêtes gauches (orientées NO) et  $n$  arêtes droites (orientées NE). En contractant toutes les arêtes gauches (respectivement droites) de  $B$  on obtient un arbre planaire enraciné  $C_L(B)$  (respectivement  $C_R(B)$ ) dans  $\mathcal{T}_n$  et on vérifie facilement que les deux applications  $C_L, C_R : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$  sont bijectives.

Désignons par  $\bar{X}$  l'arbre "miroir" obtenu en réfléchissant un arbre  $X \in \mathcal{B}_n$  ou  $X \in \mathcal{T}_n$  par rapport à une droite verticale. On montre facilement l'identité  $\overline{C_R(B)} = C_L(\bar{B})$ . En conjuguant l'involution  $T \mapsto \bar{T}$  sur  $\mathcal{T}_n$  par les bijections  $C_R, C_L$ , on obtient ainsi deux involutions  $\iota_R(B) = C_R^{-1}(\overline{C_R(B)}) = C_L^{-1}(C_R(B))$



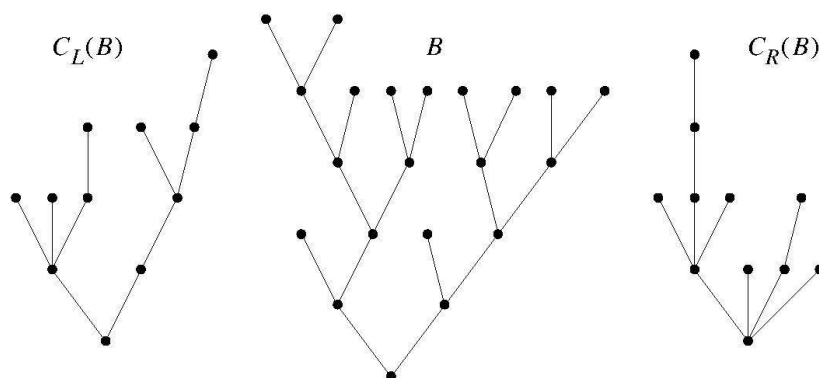


FIGURE 3

Les deux arbres  $C_L(B), C_R(B)$  associés à un arbre binaire  $B$ .

et  $\iota_L(B) = C_L^{-1}(\overline{C_L(B)}) = \overline{C_R^{-1}(C_L(B))}$  sur  $\mathcal{B}_n$ . Une construction analogue, à savoir  $\tilde{\iota}_R = C_R(\overline{C_R^{-1}(T)})$  et  $\tilde{\iota}_L = C_L(\overline{C_L^{-1}(T)})$ , définit deux involutions  $\tilde{\iota}_R, \tilde{\iota}_L$  sur  $\mathcal{T}_n$ . Il serait intéressant de comprendre les orbites dans  $\mathcal{B}_n$  (respectivement  $\mathcal{T}_n$ ) sous l'action du groupe diédral de générateurs  $\iota_R, \iota_L$  (respectivement  $\tilde{\iota}_R, \tilde{\iota}_L$ ). En particulier, les points fixes de  $\iota_R$  (ou les points fixes de  $\iota_L$ ) sont en bijection avec les arbres "symétriques" de  $\mathcal{T}_n$  qui satisfont  $\bar{T} = T$  (au nombre de  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ) tandis que les points fixes de  $\tilde{\iota}_R$  (ou les points fixes de  $\tilde{\iota}_L$ ) correspondent bijectivement aux arbres symétriques binaires réguliers de  $\mathcal{B}_n$ . Le nombre d'arbres symétriques binaires réguliers est donné par le nombre de Catalan  $\binom{2m}{m}/(m+1)$  pour  $n = 2m + 1$  impair. Pour  $n > 0$  pair de tels arbres n'existent pas.

Pour terminer cette digression, mentionnons encore le fait (déjà rencontré dans la preuve du théorème 2) que la suite  $i_1, \dots, i_{n+1}$  des valences des  $n+1$  sommets rencontrés pour la première fois lorsqu'on contourne un arbre  $T \in \mathcal{T}_n$  en partant de sa racine définit bijectivement un mot de Łukasiewicz  $s_{i_1} \dots s_{i_{n+1}}$  de longueur  $n+1$ .

## 8. DÉTERMINANTS DE HANKEL

Le but de ce chapitre est la preuve du théorème 5. Pour cela, nous introduisons les mots de Motzkin et rappelons quelques-unes de leurs propriétés. Des études plus complètes sont contenues par exemple dans [5] et [19], voir aussi [20].

Un *chemin de Motzkin* de longueur  $n$  est un chemin dans le premier quadrant  $x, y \geq 0$  qui relie l'origine  $(0, 0)$  au point  $(n, 0)$  en utilisant  $n$  pas de la forme  $(1, -1)$ ,  $(1, 0)$  ou  $(1, 1)$ .

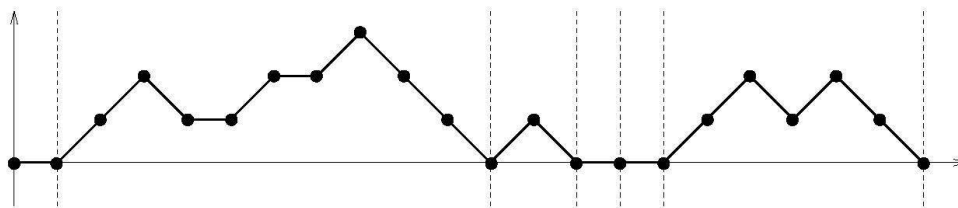


FIGURE 4

Un chemin de Motzkin de longueur 21 et ses 6 facteurs premiers.

Notons  $\Gamma(n)$  l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur  $n$ . Chaque  $\gamma \in \Gamma(n)$  est affecté d'un poids  $w(\gamma)$  défini comme le produit des poids des différents arcs qui le constituent: un palier  $((i, h), (i + 1, h))$  situé à la hauteur  $h$  est affecté du poids  $p(h)$ ; une descente  $((i, h + 1), (i + 1, h))$  de la hauteur  $h + 1$  à la hauteur  $h$  est affectée du poids  $q(h)$ ; enfin, chaque montée  $((i, h), (i + 1, h + 1))$  est affectée du poids 1. Le poids  $w(\gamma)$  est ainsi un monôme en les variables (commutatives)  $p(0), p(1), p(2), \dots$  et  $q(0), q(1), q(2), \dots$  et on peut former la série génératrice

$$c(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u^n \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} w(\gamma)$$

$$= 1 + p(0)u + (p(0)^2 + q(0))u^2 + (p(0)^3 + 2p(0)q(0) + p(1)q(0))u^3 + \dots$$

des chemins de Motzkin. Le chemin de Motzkin de longueur 21 représenté ci-dessus contribue ainsi pour

$$p(0) \ 1 \ 1 \ q(1) \ p(1) \ 1 \ p(2) \ 1 \ q(2) \ q(1) \ q(0) \ 1 \ q(0) \ p(0) \ p(0) \ 1 \ 1 \ q(1) \ 1 \ q(1) \ q(0)$$

$$= p(0)^3 p(1) p(2) q(0)^3 q(1)^4 q(2)$$

au coefficient  $[u^{21}]c(u)$ .

Un chemin de Motzkin est *premier* s'il n'intersecte la droite horizontale discrète  $\mathbf{Z} \times \{0\}$  qu'en ses extrémités  $(0, 0)$  et  $(n, 0)$ . Il est clair que tout chemin de Motzkin premier est soit un palier à la hauteur 0 (valué  $p(0)$ ), soit commence avec une montée de la hauteur 0 à la hauteur 1, continue avec un chemin de Motzkin (éventuellement vide) allant de la hauteur 1 à la hauteur 1 et se termine avec une descente de la hauteur 1 à la hauteur 0 (valuée  $q(0)$ ).

De plus, tout chemin de Motzkin non vide se factorise de manière unique en produit de chemins de Motzkin premiers (il suffit de considérer les sommets situés à la hauteur 0). En itérant, on obtient immédiatement le théorème suivant (voir [5]):

THÉORÈME 6. *Soit*

$$c(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u^n \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} w(\gamma)$$

la fonction génératrice des chemins de Motzkin. Alors

$$c(u) = \frac{1}{1 - p(0)u - \frac{q(0)u^2}{1 - p(1)u - \frac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \frac{q(2)u^2}{\ddots}}}}$$

On appelle le développement du théorème précédent *fraction continue de Jacobi*, ou encore *J-fraction*. Il permet d'exprimer les coefficients  $c_n$  d'une série formelle à l'aide de chemins (de Motzkin). En fait, on a la généralisation suivante. Soit

$$d(u) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n u^n = \frac{d_0}{1 - p(0)u - \frac{q(0)u^2}{1 - p(1)u - \frac{q(1)u^2}{\ddots}}} = d_0 c(u)$$

et soit  $D = (d_{i+j})_{0 \leq i, j < \infty}$  la matrice de Hankel (infinie) associée à la suite  $d_0, d_1, d_2, \dots$  de série génératrice  $d(u)$ . Nous dirons qu'un mineur de  $D$  est un *déterminant de Hankel*. Un tel mineur sera noté  $D_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)}$ , en désignant par  $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$  et  $0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_k$  les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait. Le coefficient  $m_{i,j}$  de la sous-matrice associée à  $D_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)}$  est donc donné par  $m_{i,j} = d_{\alpha_i + \beta_j}$  pour  $0 \leq i, j \leq k$ . Regardons, pour  $0 \leq i \leq k$ , les points  $A_i = (-\alpha_i, 0)$  et  $B_i = (\beta_i, 0)$ . La somme des valuations (relativement aux variables  $p(0), p(1), p(2), \dots$  et  $q(0), q(1), q(2), \dots$ ) des chemins de Motzkin allant de  $A_i$  à  $B_j$  est  $c_{\alpha_i + \beta_j}$ , le terme  $(i, j)$  du déterminant  $C_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)}$ , où  $C = (c_{i+j})_{0 \leq i, j < \infty}$  est la matrice de Hankel associée à la série génératrice  $c(u)$ . On peut donc énoncer le théorème suivant (voir [19], chapitres IV et V, [20] ou [6]):

THÉORÈME 7. *On a*

$$D\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) = d_0^{k+1} C\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) \\ = d_0^{k+1} \sum_{(\sigma; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} w(\gamma_0)w(\gamma_1)\cdots w(\gamma_k),$$

où la sommation est étendue aux paires formées par une permutation  $\sigma \in S_{k+1}$  et une configuration  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$  de  $k + 1$  chemins de Motzkin sans sommets communs avec  $\gamma_i$  reliant  $A_i$  à  $B_{\sigma(i)}$  pour tout  $0 \leq i \leq k$ .

REMARQUE. Dans le théorème précédent, deux chemins de Motzkin  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$  peuvent s'intersecter en des points de la forme  $\mathbf{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (de tels points ne sont pas considérés comme étant des sommets).

*Preuve.* En omettant la condition "sans sommets communs", on voit que la somme est  $C\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right)$  par définition du déterminant. Cependant, si deux chemins  $\gamma_i \neq \gamma_j$  ont un sommet commun, alors on peut continuer, à partir du premier sommet commun rencontré, le premier chemin sur le second et le second sur le premier. Il est évident que les contributions de ces deux configurations s'annulent.  $\square$

Le théorème précédent permet de calculer le déterminant de certaines matrices. On dénombre pour cela des chemins de Motzkin convenablement pondérés.

THÉORÈME 8. *On a*

$$\text{deg}_{p(0)} D\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) = \text{deg}_{p(0)} C\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) \leq (\alpha_k - k) + (\beta_k - k)$$

et

$$[p(0)^{\alpha_k + \beta_k - 2k}] D\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) = d_0^{k+1} [p(0)^{\alpha_k + \beta_k - 2k}] C\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) \\ = d_0^{k+1} B\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \end{matrix}\right)$$

avec  $B = (b_{i+j})_{0 \leq i, j < \infty}$  et

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n = \frac{q(0)}{1 - p(1)u - \frac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \frac{q(2)u^2}{\ddots}}}$$

En particulier,

$$D\left(\begin{matrix} 0, 1, \dots, k \\ 0, 1, \dots, k \end{matrix}\right) = d_0^{k+1} q(0)^k q(1)^{k-1} q(2)^{k-2} \dots q(k-2)^2 q(k-1)$$

ne dépend pas de  $p(0), p(1), p(2), \dots$

*Preuve.* Pour que le degré

$$\text{deg}_{p(0)} D\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right) = \text{deg}_{p(0)} C\left(\begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{matrix}\right)$$

en la variable  $p(0)$  devienne maximal, il faut (et il suffit) que les configurations  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$  satisfassent aux conditions suivantes: Le chemin  $\gamma_0$  relie  $A_0$  à  $B_0$  et reste toujours à la hauteur 0 (ceci donne une contribution de  $p(0)^{\beta_0+\alpha_0}$ ). Le chemin  $\gamma_i$  commençant à  $A_i = (-\alpha_i, 0)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , reste à la hauteur 0 jusqu'à  $(-\alpha_{i-1} - 1, 0)$  et monte à  $(-\alpha_{i-1}, 1)$  ensuite (ceci donne une contribution de  $p(0)^{\alpha_i-\alpha_{i-1}-1}$ ). De manière analogue, le chemin qui se termine à  $B_i = (\beta_i, 0)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , descend de  $(\beta_{i-1}, 1)$  vers  $(\beta_{i-1} + 1, 0)$  et reste ensuite jusqu'à  $B_i$  à la hauteur 0 (ceci donne une contribution de  $q(0)p(0)^{\beta_i-\beta_{i-1}-1}$ ). Ce qui n'a pas encore été considéré n'est rien d'autre qu'une configuration de  $k$  chemins de Motzkin (translatés par le vecteur  $(0, 1)$ ) deux à deux disjoints qui relient les sommets  $(-\alpha_0, 1), (-\alpha_1, 1), \dots, (-\alpha_{k-1}, 1)$  aux sommets  $(\beta_0, 1), (\beta_1, 1), \dots, (\beta_{k-1}, 1)$ .  $\square$

*Preuve de l'assertion (i) du théorème 5.* Soit  $a(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + \dots$  une série génératrice. Comme les termes de la suite  $(\det((I_{i+j+k}(x))_{0 \leq i, j < n}))_{n=1, 2, 3, \dots}$  dépendent polynomialement de  $x$  et des coefficients  $a_0, a_1, \dots$ , il suffit d'étudier le cas générique  $a_0 \neq 0$ . Considérons la transformée inverse continue  $I^x[a(u)] = a(u)/(1 + xua(u))$ . On a alors

$$I^x[a(u)] = \frac{a_0}{\frac{a_0}{a(u)} + a_0ux} = \frac{a_0}{1 - \left(\frac{a_1}{a_0} - a_0x\right)u - \left(\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0u} - \frac{a_0}{a(u)u^2}\right)u^2}$$

et on remarque que

$$\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0u} - \frac{a_0}{a(u)u^2} = \frac{a_0a_2 - a_1^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2a_3 - 2a_0a_1a_2 + a_1^3}{a_0^3}u + \dots$$

n'a pas de pôle en 0. On cherche à calculer le degré en  $x$  de  $D\left(\begin{matrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ k, k+1, \dots, k+n-1 \end{matrix}\right)$  où  $D$  est comme ci-dessus. Le théorème 8 montre que ce degré est  $\leq (n-1) - (n-1) + k + n - 1 - (n-1) = k$  ce qui prouve l'assertion (i) du théorème 5.  $\square$

REMARQUE. Soit  $A_x$  la matrice de Hankel associée à la série  $I^x[a(u)]$ . Le théorème 8 montre l'égalité

$$[x^{\alpha_k + \beta_k - 2k}]A_x \begin{pmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \end{pmatrix} = a_0^{k+1}(-a_0)^{\alpha_k + \beta_k - 2k} \widehat{A} \begin{pmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$

où  $\widehat{A}$  est la matrice de Hankel associée à la série  $\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0 u} - \frac{a_0}{a(u)u^2}$ . L'identité

$$A_x \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k \\ 0, 1, \dots, k \end{pmatrix} = A_{x=0} \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k \\ 0, 1, \dots, k \end{pmatrix}$$

est d'ailleurs une illustration de la dernière partie du théorème 8.

*Preuve de l'assertion (ii) du théorème 5.* En appliquant l'assertion (i) du théorème 5 à l'identité  $I^x[\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n] = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x)t^n$ , nous pouvons supposer  $x = 0$ . On a maintenant le développement

$$\begin{aligned} q_{s_1=0}(u) &= s_0 u + s_0^2 s_2 u^3 + s_0^3 s_3 u^4 + (s_0^4 s_4 + 2s_0^3 s_2^2)u^5 + \dots \\ &= s_0 \frac{u}{1 - p(0)u - \frac{q(0)u^2}{1 - p(1)u - \frac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \dots}}} \end{aligned}$$

avec  $p(0) = 0$ ,  $q(0) = s_0 s_2$ ,  $p(1) = \frac{s_0 s_3}{s_2}$ ,  $q(1) = s_0 s_2 + \frac{s_0^2 s_4}{s_2} - \frac{s_0^2 s_3^2}{s_2^2}$ , ... La proposition 2 du chapitre 7 implique donc

$$q(u) = q_{s_1=0} \left( \frac{u}{1 - s_1 u} \right)$$

et nous avons

$$q \left( \frac{u}{1 - s_1 u} \right) = s_0 \frac{u}{1 - (s_1 + p(0))u - \frac{q(0)u^2}{1 - (s_1 + p(1))u - \frac{q(1)u^2}{1 - (s_1 + p(2))u - \dots}}}$$

L'assertion (ii) découle maintenant de la dernière partie du théorème 8.  $\square$

REMARQUE. L'identité

$$\left( \frac{t}{1 - tx} \right)^n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \binom{k}{n-1} x^{k+1-n} t^{k+1}$$

montre qu'on a

$$\frac{1}{(1-xt)} a\left(\frac{t}{1-xt}\right) = \sum_{n,k} \binom{k}{n} a_n x^{k-n} t^k$$

pour  $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ . La suite formée des coefficients  $b_k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a_n$  est la *transformée binomiale* (de paramètre  $x$ ) de la suite  $a = (a_0, a_1, \dots)$ . Il découle de la preuve ci-dessus que deux suites reliées par une transformation binomiale possèdent la même transformée de Hankel.

Les auteurs remercient Pierre de la Harpe et Frédéric Chapoton pour des remarques et discussions intéressantes ainsi que le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour un soutien financier.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BACHER, R. *Sur le groupe d'interpolation*. arXiv: math.CO/0609736.
- [2] BROMWICH, T.J. *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. (Second edition revised with the assistance of T. M. MacRobert). St Martin's Press, Macmillan, 1959.
- [3] CORI, R. Words and trees. Chapitre 11 dans le livre [14].
- [4] DVORETZKY, A. and TH. MOTZKIN. A problem on arrangements. *Duke Math. J.* 14 (1947), 305–313.
- [5] FLAJOLET, P. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.* 32 (1980), 125–161.
- [6] FOMIN, S. and A. ZELEVINSKY. Total positivity: tests and parametrizations. *Math. Intell.* 22 (2000), 23–33.
- [7] GILEWICZ, J. *Approximants de Padé*. Lecture Notes in Mathematics 667, Springer, 1978.
- [8] GOULDEN, I. P. and J. M. JACKSON. *Combinatorial Enumeration*. Wiley, 1983.
- [9] GOURSAT, E. *Cours d'Analyse*. Tome II, 7<sup>e</sup> éd. Gauthier-Villars, 1949.
- [10] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis*. Volume I. Wiley, New York, 1988.
- [11] — Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 86 (1984), 115–134.
- [12] KRATTENTHALER, C. Advanced determinant calculus. *Sém. Loth. de Comb.* 42 (1999), Article B42q.
- [13] LAGRANGE. Nouvelle méthode pour résoudre des équations littérales par le moyen des séries. *Mém. Acad. Roy. Belles-Lettres de Berlin XXIV* (1770) dans *Œuvres de Lagrange*. Tome III, Gauthier-Villars (1869), 5–73.
- [14] LOTHAIRE, M. *Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Math. and its Applications 17 (1983).

- [15] MALLOWS, C.L., A.M. ODLYZKO and N.J.A. SLOANE. Upper bounds for modular forms, lattices, and codes. *J. Algebra* 36 (1975), 68–76.
- [16] PÓLYA, G. and G. SZEGÖ. *Problems and Theorems in Analysis I*. Springer, 1972.
- [17] RANEY, G.N. Functional composition patterns and power series reversion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 94 (1960), 441–451.
- [18] STANLEY, R.P. *Enumerative Combinatorics*. Volume 2. Cambridge University Press, 1999.
- [19] VIENNOT, G. Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux. Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, 1983.
- [20] ——— A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications. *Orthogonal polynomials and applications*. (Barle-Duc, 1984). *Lecture Notes in Mathematics 1171*, Springer, 1985, 139–157.
- [21] WHITTAKER, E.T. and G.N. WATSON. *A Course of Modern Analysis*. 4th edition. Cambridge University Press, 1978.

(Reçu le 14 mars 2005; version révisée reçue le 16 mars 2006)

Roland Bacher

Institut Fourier  
UMR 5582  
BP 74  
F-38402 St Martin d'Hères Cedex  
France  
*e-mail*: Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr

Bodo Lass

Institut Desargues  
UMR 5028  
21, av. Claude Bernard  
F-69622 Villeurbanne Cedex  
France  
*e-mail*: lass@math.univ-lyon1.fr



Leere Seite  
Blank page  
Page vide