**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 53 (2007)
**Heft:** 3-4

**Artikel:** Un exemple de non-dérivabilité en géométrie du triangle
**Autor:** Diximier, Jacques / Kahane, Jean-Pierre / Nicolas, Jean-Louis
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-109552

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

*L'Enseignement Mathématique (2) 53 (2007), 369–428*

# UN EXEMPLE DE NON-DÉRIVABILITÉ EN GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

par Jacques DIXMIER, Jean-Pierre KAHANE et Jean-Louis NICOLAS *)

ABSTRACT. Let $T$ be a triangle in a Euclidean plane. If $f(T)$ denotes the triangle whose vertices are the midpoints of the sides of $T$, and if we iterate the function $f$, the situation is simple: all triangles $f^n(T)$ are homothetic and tend to the centroid of $T$. But if $g(T)$ denotes the triangle whose vertices are the feet of the altitudes of $T$, the problem is not as easy. We shall see that $g^n(T)$ tends to a point $L(T)$, a new point geometrically linked to $T$ and that $L(T)$ is a continuous function, in fact hölderian, but is nowhere differentiable, hence the title of this paper.

In Part 1, the existence of $L(T)$ is proved and its coordinates are calculated in a simple system of axes tied to $T$. If the circle $\Gamma(T)$ circumscribed to $T$ is fixed, $T$ depends on three angles $\alpha, \beta, \gamma$. By rotation, we may require that $\alpha + \beta + \gamma = 0$ so that $L(T)$ becomes a function $L(\alpha, \beta)$ of two variables, and the coordinates of $L(T)$ become trigonometric series of lacunary type. In Part 2, some properties of regularity and irregularity of more general series (lacunary series of imaginary exponentials in $\mathbf{R}^d$) are given; from them, the behaviour of $L(T)$ as described above follows. In Part 4, the extreme values of the distance between the point $L(T)$ and the centre $O(T)$ of $\Gamma(T)$ are studied. We show that $L(T) = O(T)$ if and only if $T$ is equilateral, that $L(T)O(T) \leq \frac{4}{3}R(T)$ for all triangles $T$, where $R(T)$ is the radius of $\Gamma(T)$, and that $L(T)O(T) = \frac{4}{3}R(T)$ if and only if the angles of $T$ are $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$. In Part 5, we shall see that the image of the map $(\alpha, \beta) \mapsto L(\alpha, \beta)$ is the closure of its interior.

When $T$ is an isosceles triangle, $L(T)$ belongs to the symmetry axis of $T$, and its abscissa on this axis is given, after normalization, by the following Weierstrass–Hardy function:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \dots \end{aligned}$$

In Part 3, we give detailed information concerning this function: its minimum, its maximum, its local behaviour around $t = 0$ (which is of fractal type), etc.

*) Recherche financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208.

## INTRODUCTION

Soit $T$ un triangle dans un plan euclidien. Si l'on note $f(T)$ le triangle formé par les milieux des côtés, et si l'on itère, la situation est simple : les triangles $f^n(T)$ sont tous homothétiques et tendent vers le centre de gravité de $T$. Mais si l'on note $g(T)$ le triangle formé par les pieds des hauteurs, l'itération pose des problèmes plus difficiles. Les $g^n(T)$ tendent, on le verra, vers un point $L(T)$, un nouveau point attaché géométriquement à $T$ et $L(T)$ est une fonction continue, en fait höldérienne, mais partout non différentiable ; cela justifie le titre de cet article.

La partie 1 prouve l'existence de $L(T)$ et calcule ses coordonnées dans un repère lié simplement à $T$. Si le cercle $\Gamma(T)$ circonscrit à $T$ est fixé, $T$ dépend de trois angles $\alpha, \beta, \gamma$. Par rotation, imposons $\alpha + \beta + \gamma = 0$ de sorte que $L(T)$ devient une fonction de deux angles $\alpha$ et $\beta$ :

$$(0.1) \quad L(T) = L(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} \left( e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{-(-2)^n i(\alpha+\beta)} \right).$$

La partie 2 démontre des propriétés de régularité et d'irrégularité de séries plus générales (séries d'exponentielles imaginaires lacunaires dans $\mathbf{R}^d$) ; d'où, en particulier, le comportement annoncé de $L(T)$. Dans la partie 4, on étudie les valeurs extrêmes de la distance du point $L(T)$ au centre $O(T)$ de $\Gamma(T)$. On montre que $L(T) = O(T)$ si et seulement si $T$ est équilatéral, que $L(T)O(T) \leq \frac{4}{3}R(T)$ ($R(T)$, rayon de $\Gamma(T)$) pour tout triangle $T$, et que $L(T)O(T) = \frac{4}{3}R(T)$ si et seulement si les angles de $T$ sont $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$. Dans la partie 5, on montre que l'image de l'application $(\alpha, \beta) \mapsto L(\alpha, \beta)$ est l'adhérence de son intérieur.

Quand $T$ est isocèle, $L(T)$ appartient à l'axe de symétrie de $T$ et son abscisse sur cet axe est donnée, après normalisation, par la fonction de Weierstrass–Hardy suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \dots \end{aligned}$$

Dans la partie 3, nous donnons des informations détaillées sur cette fonction : son minimum, son maximum, son comportement local autour de $t = 0$ (qui est de type fractal), etc.

Nous avons plaisir à remercier X. Roblot et M. Deléglise pour l'aide apportée à l'élaboration des figures ainsi que J. A. Bondy pour la traduction en anglais du résumé.

## 1. Existence et calcul de $L(T)$

1.1. Pour tout triangle $T$, on notera $\Gamma(T)$ le cercle circonscrit à $T$, $O(T)$ et $R(T)$ le centre et le rayon de $\Gamma(T)$, $\omega(T)$ le centre du cercle d'Euler, $G(T)$ le centre de gravité.

Rappelons que le cercle d'Euler (ou cercle des neuf points) d'un triangle $T$ passe par les pieds des hauteurs, par les pieds des médianes et par les milieux des segments joignant l'orthocentre $H(T)$ aux trois sommets. De plus, les points $O$, $G$, $\omega$ et $H$ sont alignés, $\omega$ est le milieu de $OH$ et $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$.

1.2. On part d'un cercle $\Gamma$ de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $A, B, C \in \Gamma$ et $T = (A, B, C)$. Identifiant le plan à $\mathbf{C}$, on peut écrire

$$A = O + Re^{i\alpha} \qquad B = O + Re^{i\beta} \qquad C = O + Re^{i\gamma}$$

où $\alpha, \beta, \gamma$ sont des angles modulo $2\pi$ (la figure 1 a été tracée avec $\alpha = 70°$, $\beta = 198°$ et $\gamma = 342°$). On a

$$G = G(T) = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-\frac{1}{2}$. On a $\mathcal{H}(\Gamma) = \Gamma'$, cercle d'Euler de $T$, $\mathcal{H}(O) = O' = \omega(T)$. Les points $\widetilde{A} = \mathcal{H}(A)$, $\widetilde{B} = \mathcal{H}(B)$, $\widetilde{C} = \mathcal{H}(C)$ sont les milieux de $BC$, $CA$, $AB$. On a

$$\begin{aligned} O' &= G - \frac{1}{2}(O - G) = -\frac{1}{2}O + \frac{3}{2}G = \frac{1}{2}(A + B + C - O) \\ &= \frac{1}{2}\left(2O + Re^{i\alpha} + Re^{i\beta} + Re^{i\gamma}\right) \\ &= O + \frac{1}{2}R\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

D'autre part, $\widetilde{A} - O' = -\frac{1}{2}(A - O) = -\frac{1}{2}Re^{i\alpha}$, donc

$$\widetilde{A} = O' - \frac{1}{2}Re^{i\alpha}, \qquad \widetilde{B} = O' - \frac{1}{2}Re^{i\beta}, \qquad \widetilde{C} = O' - \frac{1}{2}Re^{i\gamma}. \tag{1.2}$$

Soient $A'$, $B'$, $C'$ les pieds des hauteurs de $T$. On dira que $T' = (A', B', C')$ est *le triangle descendant* de $T$. On a

$$\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, A', B', C' \in \Gamma'$$

$$\widetilde{A}A' \text{ (resp. } \widetilde{B}B', \widetilde{C}C') \quad \text{parallèle à} \quad \widetilde{B}\widetilde{C} \text{ (resp. } \widetilde{C}\widetilde{A}, \widetilde{A}\widetilde{B}).$$

Donc, si l'on écrit $A' = O' - \frac{1}{2}Re^{i\delta}$, on a $\alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \pmod{2\pi}$ d'après (1.2).

Par suite

$$A' = O' - \frac{1}{2}Re^{i(\beta+\gamma-\alpha)}, \tag{1.3}$$
$$B' = O' - \frac{1}{2}Re^{i(\gamma+\alpha-\beta)},$$
$$C' = O' - \frac{1}{2}Re^{i(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

1.3. En particulier, si $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$, les formules (1.3) deviennent

$$A' = O' - \frac{1}{2}Re^{-2i\alpha} \qquad B' = O' - \frac{1}{2}Re^{-2i\beta} \qquad C' = O' - \frac{1}{2}Re^{-2i\gamma}. \tag{1.4}$$

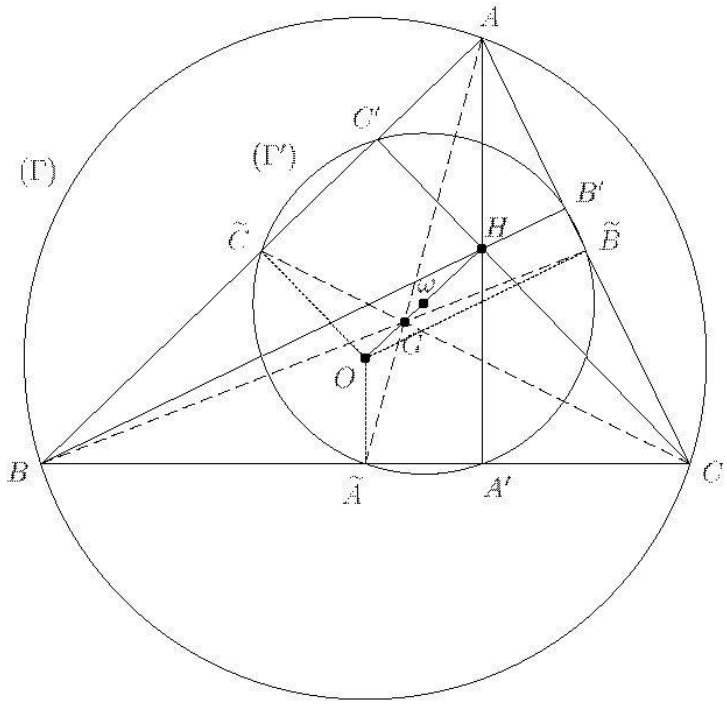


FIGURE 1
Le cercle d'Euler du triangle $(A, B, C)$

1.4. On notera que le cercle d'Euler n'est défini, en principe, que si $A, B, C$ sont distincts. Mais les formules pour $O', A', B', C'$ gardent un sens dans tous les cas. Si par exemple, $A = B$, on a $\alpha = \beta$, donc

$$A' = O' - \frac{1}{2}Re^{i\gamma} = O + \frac{1}{2}R\left(e^{i\alpha} + e^{i\alpha} + e^{i\gamma}\right) - \frac{1}{2}Re^{i\gamma} = O + Re^{i\alpha} = A$$

et de même $B' = B = A$.

1.5. Passons à l'itération. $T, A, B, C, O$ seront notés $T_0, A_0, B_0, C_0, O_0$, et $T', A', B', C', O'$ seront notés $T_1, A_1, B_1, C_1, O_1$. Désignons par $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R, \alpha, \beta, \gamma)$ la transformation de $(O_0, A_0, B_0, C_0)$ en $(O_1, A_1, B_1, C_1)$ définie par les formules (1.1) et (1.4). Ces formules gardent un sens lorsque $R$ est négatif; on peut donc poser $R_1 = -\frac{1}{2}R$ et itérer

$$\mathcal{D}^n(O, A, B, C) = (O_n, A_n, B_n, C_n).$$

On posera $T_n = (A_n, B_n, C_n)$, *$n$-ième descendant de* $T = T_0 = (A_0, B_0, C_0)$.

1.6. LEMME. *On suppose* $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$ *et* $R = 1$. *Alors* $O_n$, $A_n$, $B_n$, $C_n$ *ont une limite commune* $L(T)$ *quand* $n \to \infty$ *et l'on a*

$$L(T) = O + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{(-2)^n i\gamma}\right).$$

On a $O_0 = O$, $R_0 = 1$, $A_0 = e^{i\alpha}$, $B_0 = e^{i\beta}$, $C_0 = e^{i\gamma}$, puis, utilisant (1.1) et (1.4),

$$A_n = O_n + \frac{1}{2}R_n e^{i\alpha_n} \qquad B_n = O_n + \frac{1}{2}R_n e^{i\beta_n} \qquad C_n = O_n + \frac{1}{2}R_n e^{i\gamma_n}$$

avec

$$\alpha_n = -2\alpha_{n-1}, \quad \beta_n = -2\beta_{n-1}, \quad \gamma_n = -2\gamma_{n-1}, \quad R_n = (-1)^n 2^{-n},$$
$$O_{n+1} = O_n + \frac{1}{2}(-1)^n 2^{-n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{(-2)^n i\gamma}\right)$$

d'où

$$O_{n+1} = O + \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{-2i\alpha} + e^{-2i\beta} + e^{-2i\gamma}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{2}(-1)^n 2^{-n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{(-2)^n i\gamma}\right)$$

donc $O_n$ a une limite $L(T)$. Comme $R_n \to 0$, on voit que $A_n, B_n, C_n \to L(T)$.

1.7. Soit $T = (A, B, C)$ un triangle, $O = O(T)$. Soit $\Delta$ un axe passant par $O$. La condition $(\Delta, \overrightarrow{OA}) + (\Delta, \overrightarrow{OB}) + (\Delta, \overrightarrow{OC}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ définit 3 axes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ faisant entre eux des angles de $\pm\frac{2\pi}{3}$. On les appellera les *axes ternaires* de $T$. Nous pouvons alors reformuler le lemme 1.6 de la manière suivante :

1.8. PROPOSITION. *Soient $T$ un triangle tel que $R(T) = 1$, et $O = O(T)$. On prend $O$ pour origine, et les axes $Ox, Oy$ tels que $Ox$ soit l'un des axes ternaires de $T$, d'où une identification du plan à $\mathbf{C}$. Posons $A = e^{i\alpha}$, $B = e^{i\beta}$, $C = e^{i\gamma}$. Alors*

$$L(T) = L(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{(-2)^n i\gamma}\right).$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$, la fonction $L(\alpha, \beta, \gamma)$ sera souvent considérée comme une fonction de $\alpha, \beta$ seulement et notée $L(\alpha, \beta)$.

1.9. On a

$$\begin{aligned}
&L(\alpha + 2\pi, \beta) = L(\alpha, \beta + 2\pi) = L(\alpha, \beta),\\
&L(\beta, \alpha) = L(\alpha, \beta),\\
&L(-\alpha, -\beta) = \overline{L(\alpha, \beta)},\\
&L(\alpha + \frac{2\pi}{3}, \beta + \frac{2\pi}{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}} L(\alpha, \beta),\\
&L(\alpha, \beta) = L(\alpha, -\alpha - \beta) = L(\beta, -\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

Dans le plan des $(\alpha, \beta)$, considérons le carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, réunion de 4 triangles fermés, suivant la figure 2.

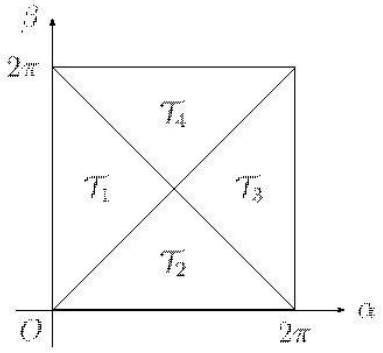


FIGURE 2

Tout point du plan est congru modulo $2\pi\mathbf{Z} \times 2\pi\mathbf{Z}$ à un point du carré. Comme $L(\beta, \alpha) = L(\alpha, \beta)$, tout point $L(\alpha, \beta)$ est obtenu en faisant varier $(\alpha, \beta)$ dans $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_4$. Comme

$$L(2\pi - \beta, 2\pi - \alpha) = L(-\beta, -\alpha) = L(-\alpha, -\beta) = \overline{L(\alpha, \beta)}, \tag{1.5}$$

il suffit d'étudier $L(\alpha,\beta)$ pour $(\alpha,\beta)$ parcourant $\mathcal{T}_1$. Nous verrons en 4.4 et en 4.13 une partition du triangle $\mathcal{T}_1$ relativement aux valeurs prises par $L$.

Voyons ce qui se passe sur les droites qui bordent $\mathcal{T}_1$. Pour $\alpha = 0$, on a $\beta \equiv -\gamma \pmod{2\pi}$, $A = 1$. Pour $\alpha + \beta = 2\pi$, on a $\gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $C = 1$. Dans les deux cas, $(A,B,C)$ est isocèle avec $Ox$ pour axe de symétrie. On reviendra sur ce cas au n° 1.15. Pour $\alpha = \beta$, on a $A = B$, le triangle $(A,B,C)$ est dégénéré, $L(T) = A = B$ d'après le n° 1.4, donc $L(T)$ parcourt $\Gamma$.

1.10. La proposition 1.8 entraîne l'équation fonctionnelle suivante :

$$2\,L(\alpha,\beta) = e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i(\alpha+\beta)} - L(-2\alpha,-2\beta)\,.$$

1.11. REMARQUE. Si $T$ est équilatéral, le triangle descendant a pour sommets les milieux des côtés, donc $L(T) = O(T)$. Nous verrons au n° 4.12 que la réciproque est vraie.

1.12. REMARQUE. Soit $H$ l'orthocentre de $(A,B,C)$, de sorte que $\{A,B,C,H\}$ est une « configuration orthocentrique ». Les triangles $(A,B,C)$, $(H,B,C)$, $(H,C,A)$, $(H,A,B)$ ont même descendant, donc

$$L(A,B,C) = L(H,B,C) = L(H,C,A) = L(H,A,B)\,.$$

Cela, combiné avec le n° 1.11, prouve que si $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$, on a $L(A,B,C) = A$.

1.13. La fonction $(\alpha,\beta) \mapsto L(\alpha,\beta)$ est une application continue de $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$ dans le plan. L'image de $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$ par $L$ est une partie compacte $K$ du plan, connexe par arcs, symétrique par rapport à $Ox$, invariante par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On a $\Gamma \subset K$ (cf. n° 1.9).

PROBLÈME 1. La frontière de $K$ est elle une courbe de Jordan fermée ?

PROBLÈME 2. $K$ est-il simplement connexe ? En particulier, le disque de bord $\Gamma$ est-il contenu dans $K$ ?

On prouvera en 5.10 que $K$ est l'adhérence d'un ensemble ouvert, autrement dit, que l'intérieur de $K$ est dense dans $K$.

1.14. Il est intéressant de savoir à quel point $L(T)$ peut être éloigné de $O$. Il s'agit donc de calculer le nombre suivant:

$$\mu = \sup\ O(T)L(T)/R(T)\,,$$

la borne étant prise sur tous les triangles. On a

$$\mu = \sup |L(\alpha, \beta)|\,,$$

la borne étant prise sur tous les couples $(\alpha, \beta)$. On verra au n°4.9 que $\mu = 4/3$.

Si un triangle $T$ a tous ses angles aigus, l'orthocentre $H$ est à l'intérieur de $T$, donc $O(T)H \leq R(T)$. Or $O_1(T) = \omega(T)$ est le milieu de $O(T)H$, donc $O(T)O_1(T) \leq \frac{1}{2}R(T)$. On a $L(T) = L(T_1)$, donc $O_1(T)L(T) = O(T_1)L(T_1) \leq \mu R(T_1) = \frac{1}{2}\mu R(T)$. Ainsi, $O(T)L(T) \leq \frac{1}{2}(1+\mu)R(T) = \frac{7}{6}R(T)$.

1.15. Cas particulier. Supposons $T$ isocèle, et plus précisément $AB = AC$. L'un des axes ternaires de $T$ est son axe de symétrie orienté de $O$ vers $A$. Alors, $\alpha = 0$, $\beta = -\gamma$. Le point $L(T)$ appartient à $Ox$ et son abscisse est

$$\begin{aligned} L(0,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}\left(\frac{1}{2} + \cos 2^n\beta\right) \\ &= \frac{1}{3} + \cos\beta - \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{4}\cos 4\beta - \frac{1}{8}\cos 8\beta + \dots \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction $t \mapsto x(t)$ par

$$x(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t + \dots \tag{1.6}$$

Alors

$$L(T) = L(0,\beta) = 1 - 2x(\beta/2)\,. \tag{1.7}$$

Voir la partie 3 pour des détails concernant la fonction $x(t)$. Son maximum est $1.023274\dots$, son minimum est $-0.1423503\dots$; donc l'ensemble $K$ du n°1.13 contient le segment $[-1.0465, 1.2847]$ de $Ox$.

1.16. Remarque. *On suppose que $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}\pi$. Alors $L(T)$ est un nombre algébrique et même cyclotomique.*

Soit $q$ un entier, $q > 1$. Il existe des entiers $j_0, r > 0$ tels que la suite $((-2)^j \bmod q)_{j \geq j_0}$ admette la période $r$. En effet, il existe $j_0, r > 0$ tels

que $(-2)^{j_0} \equiv (-2)^{j_0+r} \pmod q$ et alors $(-2)^{j_0+1} \equiv (-2)^{j_0+1+r} \pmod q$, $(-2)^{j_0+2} \equiv (-2)^{j_0+2+r} \pmod q, \ldots$

Si $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}\pi$, il existe un entier $q > 0$ tel que $\alpha, \beta \in (2\pi/q)\mathbf{Z}$. D'après ce qui précède, la suite

$$e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{-(-2)^n i(\alpha+\beta)}$$

admet la période $r$ à partir d'un certain rang. Alors $L(\alpha, \beta)$ est somme d'un nombre fini de termes cyclotomiques (le début de la série $L(\alpha, \beta)$) et de $r$ sommes infinies dont chacune est de la forme

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{-(-2)^n i(\alpha+\beta)}\right)\left(1 + \frac{(-1)^r}{2^r} + \frac{(-1)^{2r}}{2^{2r}} + \cdots\right)$$

donc est cyclotomique.

Soient $T_1, T_2, \ldots$ les triangles descendants de $T$. D'après ce qui précède et les formules de 1.6, pour $n$ assez grand, $T_{n+r}$ se déduit de $T_n$ par une homothétie $\mathcal{H}_n$. Soit $\Omega$ son centre. Comme $\mathcal{H}_n(U_r) = (\mathcal{H}_n(U))_r$ pour tout triangle $U$, on a $\mathcal{H}_n(T_{n+r}) = (\mathcal{H}_n(T_n))_r = (T_{n+r})_r = T_{n+2r}$, donc $\mathcal{H}_n(T_{n+2r}) = T_{n+3r}$, etc. Donc $\Omega = L(T)$.

## 2. Régularités et irrégularités locales de $L(T)$

2.0. La proposition 1.8 nous permet d'écrire

$$L(T) = L(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}\left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{-(-2)^n i(\alpha+\beta)}\right) \tag{2.1}$$

avec $\alpha$ et $\beta$ réels modulo $2\pi$, et, si on le désire, par 1.9, on peut restreindre l'étude de $L(\alpha, \beta)$ au domaine $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, $\alpha \leq \beta \leq 2\pi - \alpha$ (intersection du triangle $\mathcal{T}_1$ de la figure 2 et de la bande verticale $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$). Nous préférons nous en tenir à $(\alpha, \beta) \in (2\pi\mathbf{T})^2$ et $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Le spectre de $L(\alpha, \beta)$, que nous désignerons par $S$ ($=$ Sp $L(\alpha, \beta)$), est constitué des points de $\mathbf{Z}^2$ de la forme (cf. figure 3)

$$\left((-2)^n, 0\right), \quad \left(0, (-2)^n\right), \quad \left(-(-2)^n, -(-2)^n\right) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Il est «lacunaire à la Hadamard», ce qui signifie que, pour un $q > 0$, la distance de tout point $s \in S$ à $S \setminus \{s\}$ est minorée par $q\,\|s\|$ ; ici $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ convient.

Voici les résultats que nous établirons.

2.1. PROPOSITION.

1. *La fonction* $L(\alpha,\beta)$, *définie sur* $(2\pi\mathbf{T})^2$, *est höldérienne d'ordre* $\eta$ *pour tout* $\eta < 1$. *Plus précisément, il existe une constante absolue* $C$ *telle que, quels que soient* $\alpha,\beta,h,k$ *avec* $|h|+|k| \le \frac{1}{2}$, *on ait*

$$|L(\alpha+h,\beta+k) - L(\alpha,\beta)| \le C(|h|+|k|)\log\frac{1}{|h|+|k|}\,. \tag{2.2}$$

2. *La fonction* $L(\alpha,\beta)$ *appartient à la classe* $\Lambda$ *de Zygmund. Cela signifie qu'il existe une constante* $C$ *telle que, quels que soient* $\alpha,\beta,h,k$, *on ait*

$$|L(\alpha+h,\beta+k) + L(\alpha-h,\beta-k) - 2L(\alpha,\beta)| \le C(|h|+|k|)\,. \tag{2.3}$$

3. *Étant donné un angle* $\varphi \in 2\pi\mathbf{T}$, *posons*

$$\ell(\alpha,\beta) = \Re\left(e^{i\varphi}L(\alpha,\beta)\right).$$

*Quel que soit* $\varphi$, *il existe un ensemble dense de points* $(\alpha,\beta) \in (2\pi\mathbf{T})^2$ *tels que*

$$\ell(\alpha+h,\beta+k) - \ell(\alpha,\beta) = O(|h|+|k|) \qquad (|h|+|k| \to 0)\,. \tag{2.4}$$

4. *La fonction* $\ell(\alpha,\beta)$ *n'est différentiable nulle part, c'est-à-dire que pour aucun choix de* $(\alpha,\beta)$ *et des réels* $a$ *et* $b$ *on n'a*

$$\ell(\alpha+h,\beta+k) - \ell(\alpha,\beta) - ah - bk = o(|h|+|k|) \qquad (|h|+|k| \to 0)\,. \tag{2.5}$$

5. *Sauf les exceptions signalées ci-dessous, la fonction* $\ell(\alpha,\beta)$ *n'est différentiable nulle part dans aucune direction, c'est-à-dire que pour aucun choix de* $(\alpha,\beta)$ *et des réels* $\theta$ *et* $a$ *on n'a*

$$\ell(\alpha+h\cos\theta,\beta+h\sin\theta) - \ell(\alpha,\beta) - ah = o(|h|) \qquad (|h| \to 0)\,. \tag{2.6}$$

*Les exceptions sont, avec* $\gamma = -\alpha-\beta$ :

a) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\exists n \in \mathbf{N} : 2^n\alpha \equiv 0$ *ou* $2^n\beta \equiv 0$ *ou* $2^n\gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$

b) $\exists n \in \mathbf{N} : 2^n(\alpha-\beta) \equiv 0$ *ou* $2^n(\beta-\gamma) \equiv 0$ *ou* $2^n(\gamma-\alpha) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ($\varphi$ *quelconque*).

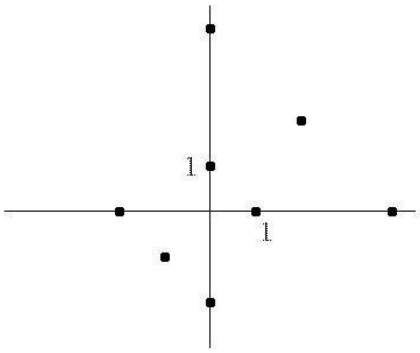


FIGURE 3
L'ensemble $S$ dans $\mathbf{Z}^2$

2.2. REMARQUES.

1. Les résultats d'irrégularité pour $\ell(\alpha,\beta)$ (points 4 et 5) sont évidemment valables pour $L(\alpha,\beta)$. Par contre, le résultat du point 3, concernant $\ell(\alpha,\beta)$, est nettement plus faible que sa transcription à $L(\alpha,\beta)$ que nous ne savons pas établir.

2. Les cas d'exception du point 5 sont constitués de six familles de droites. Sur une droite d'une des trois premières familles (cas a)), $(\alpha,\beta)$ définit un triangle $T$ dont un descendant $T^n = \mathcal{D}^n T$ a un sommet au point 1, et à partir de là $T^m$ $(m \geq n)$ est un triangle isocèle de sommet 1; $L(\alpha,\beta)$ est somme d'un polynôme trigonométrique et d'une fonction à valeurs réelles dont l'étude fera l'objet de la partie 3. Sur une droite de l'une des trois dernières familles (cas b)), le triangle $T^n$ a deux sommets confondus pour un certain $n$, et à partir de là les $T^m$ sont dégénérés; $L(\alpha,\beta)$ se réduit à un polynôme trigonométrique.

3. Dans le cas d'exception b), il peut arriver que les points $O_n$ soient confondus avec $L(T)$ à partir d'un certain rang (si $2^n(\alpha-\beta) \equiv 2^n(\beta-\gamma) \equiv 2^n(\gamma-\alpha) \equiv 0 \pmod{2\pi}$). Il en est de même quand $T$ est un triangle équilatéral ou l'ancêtre d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire quand chacune des différences $\alpha-\beta, \beta-\gamma$ et $\gamma-\alpha$ est de la forme $\dfrac{k\pi}{3\cdot 2^n}$, $3 \nmid k$. Mais en un tel $T$ la fonction $\ell(\cdot)$ est non différentiable, sauf si $T$ appartient au cas a) et si $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2.3. La proposition 2.1 découlera de propriétés générales de fonctions presque-périodiques dans $\mathbf{R}^d$ $(d = 1, 2, \ldots)$ dont les fréquences sont assez dispersées dans $\mathbf{R}^d$ et dont les coefficients sont comparables (dans un sens que l'on précisera) aux inverses des distances des fréquences à l'origine. Nous allons désigner par $(J)$ un système d'indices, par $\Lambda_J$ les fréquences $(\Lambda_J \in \mathbf{R}^d)$

et par $c_J$ les coefficients ($c_J \in \mathbf{C}$), par $X$ la variable dans $\mathbf{R}^d$ et par $\Lambda \cdot X$ le produit scalaire. La fonction considérée sera

$$f(X) = \sum_{J \in (J)} c_J \exp(i\Lambda_J \cdot X) \tag{2.7}$$

et l'on supposera toujours $\sum |c_J| < \infty$. On notera $|\ \ |$ la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^d$.

On fera toujours l'hypothèse

$$|\Lambda_J - \Lambda_K| \geq q|\Lambda_J| \qquad (J \in (J),\ K \in (J),\ K \neq J) \tag{2.8}$$

avec $q = q(f) > 0$. Dans le cas $d = 1$, c'est la condition de lacunarité d'Hadamard.

La condition (2.8) entraîne que le nombre de points $\Lambda_J$ tels que $r \leq |\Lambda_J| < 2r$ est majoré par une constante ne dépendant que de $q$ et $d$ (et non de $r$) d'où résulte

$$\#\{J \ :\ |\Lambda_J| \leq r\} \ \leq\ C_0 \log r\,, \tag{2.9}$$

$C_0$ ne dépendant que de $q$, $d$ et de la borne inférieure des $|\Lambda_J| \neq 0$.

Observons que l'hypothèse (2.8) entraîne également

$$\sum_{|\Lambda_J| \leq r} |\Lambda_J| \leq C_1 r \tag{2.10}$$

$$\sum_{|\Lambda_J| \geq r} \frac{1}{|\Lambda_J|} \leq C_1 \frac{1}{r} \tag{2.11}$$

avec $C_1 = C_1(q, d)$.

Nous allons énoncer en 2.4 et 2.8 les propriétés de $f(X)$ dont nous ferons usage pour établir la proposition 2.1.

2.4. PROPOSITION. *On suppose* (2.8) *et*

$$\sup_J\ |c_J||\Lambda_J| < \infty\,. \tag{2.12}$$

*On a alors*

$$|f(X+H) - f(X)| \leq C|H| \log \frac{1}{|H|} \tag{2.13}$$

*pour tout* $X \in \mathbf{R}^d$ *et tout* $H \in \mathbf{R}^d$ *tel que* $|H| \leq \frac{1}{2}$, *et*

$$|f(X+H) + f(X-H) - 2f(X)| \leq C|H| \tag{2.14}$$

*pour tout* $X \in \mathbf{R}^d$ *et tout* $H \in \mathbf{R}^d$, $C$ *dépendant de* $f$ *seulement.*

Pour la preuve, supposons $\sup_J |c_J||\Lambda_J| \leq 1$. Écrivons d'abord

$$f(X+H) - f(X) = \sum c_J \exp i\Lambda_J \cdot X(\exp i\Lambda_J \cdot H - 1)$$

et partageons la somme en deux, $\sum^{(1)}$ et $\sum^{(2)}$, suivant que $|\Lambda_J| \leq \frac{1}{|H|}$ (somme $\sum^{(1)}$) ou $|\Lambda_J| > \frac{1}{|H|}$ (somme $\sum^{(2)}$). On a

$$\begin{aligned}\left|\sum^{(1)}\right| &\leq \sum^{(1)} |c_J||\Lambda_J||H| \leq |H| \# \left\{J \ : \ |\Lambda_J| \leq \frac{1}{|H|}\right\} \\ &\leq C_0|H| \log \frac{1}{|H|}\end{aligned}$$

en vertu de (2.9), et

$$\left|\sum^{(2)}\right| \leq 2\sum^{(2)} |c_J| \leq 2\sum^{(2)} \frac{1}{|\Lambda_J|} \leq 2C_1|H|$$

d'après (2.11). Cela établit (2.13).

Écrivons maintenant

$$\begin{aligned}&f(X+H) + f(X-H) - 2f(X) \\ &\qquad = \sum c_J \exp i\Lambda_J \cdot X(\exp i\Lambda_J \cdot H + \exp(-i\Lambda_J \cdot H) - 2)\end{aligned}$$

et partageons la somme comme précédemment. On a

$$\left|\sum^{(1)}\right| \leq \sum^{(1)} |c_J||\Lambda_J|^2|H|^2 \leq \sum^{(1)} |\Lambda_J||H|^2 \leq C_1|H|$$

d'après (2.10), et

$$\left|\sum^{(2)}\right| \leq 4\sum^{(2)} |c_J| \leq 4C_1|H|$$

d'après (2.11), ce qui établit (2.14).

2.5. Le spectre $S$ de $L(\alpha, \beta)$ est contenu dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}$, et si on écrit ses éléments comme $\Lambda_J$, il vérifie la condition (2.8) avec $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Posons $X = (\alpha, \beta)$. En nous référant à 2.0 et en désignant le coefficient de $\exp i\Lambda_J \cdot X$ par $c_J$, on a $|c_J| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\Lambda_J|}$. Donc, pour la fonction $f(X) = L(\alpha, \beta)$, les conditions (2.8) et (2.12) sont vérifiées. La proposition 2.4 s'applique, (2.13) se traduit en (2.2) et (2.14) en (2.3). Cela établit les points 1 et 2 de la proposition 2.1.

Pour le point 3, nous avons besoin d'une proposition auxiliaire.

2.6. PROPOSITION. *Si $f$ est à valeurs réelles ($f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$) et vérifie* (2.14) *pour tout $X$ et tout $H$, il existe un ensemble dense de points $X$ dans $\mathbf{R}^d$ tel que*

$$f(X+H)-f(X)=O(|H|) \qquad (|H|\to 0). \tag{2.15}$$

En effet, (2.15) a lieu si $X$ est un minimum relatif, parce qu'alors

$$f(X+H)+f(X-H)-2f(X)=(f(X+H)-f(X))+(f(X-H)-f(X)),$$

ce qui, pour $H$ assez petit, est la somme de deux quantités positives; chacune est donc $\leq C|H|$.

Si $G$ est un ouvert de $\mathbf{R}^d$, il existe un polynôme trigonométrique $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ tel que $f+P$ ait un minimum relatif dans $G$. En appliquant à $f+P$ le résultat précédent, on voit que (2.15) a lieu pour un $X \in G$. Donc (2.15) a lieu sur un ensemble dense dans $\mathbf{R}^d$.

2.7. L'inégalité (2.3), que nous avons établie en 2.4 et 2.5, est valable en remplaçant $L(\alpha,\beta)$ par $\ell(\alpha,\beta)$. En appliquant la proposition 2.6, on a le point 3 de la proposition 2.1.

Les points 4 et 5 nécessitent un nouvel outil.

2.8. PROPOSITION. *On suppose* (2.8) *et*

$$\limsup_{|J|\to\infty} |c_J||\Lambda_J| > 0. \tag{2.16}$$

*Alors la fonction $f$ écrite en* (2.7) *n'est différentiable en aucun point, c'est-à-dire que pour aucun choix de $X \in \mathbf{R}^d$ et de $A \in \mathbf{R}^d$ on n'a*

$$f(X+H)-f(X)-A\cdot H=o(|H|) \qquad (|H|\to 0).$$

Fixons $X$ et $A$. Quitte à remplacer $c_J$ par $c_J \exp i\Lambda_J\cdot X$, nous nous ramenons au cas $X=0$. Quitte à ajouter un polynôme trigonométrique convenable, nous nous ramenons à $f(0)=0$ et $A=0$. Il s'agit donc simplement de montrer que l'hypothèse $f(X)=o(|X|)$ $(X\to 0)$ (ici $X$ remplace $H$) mène à une contradiction.

Soit $\Phi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment différentiable de support contenu dans la boule unité $\{u : |u|<1\}$, telle que $\Phi(0)=1$, et soit $\varphi(X)$ sa cotransformée de Fourier:

$$\Phi(u) = \int \exp(iu \cdot X)\, \varphi(X)\, \mathrm{d}X\,.$$

Donnons-nous $K \in (J)$. Soit $r = q\,|\Lambda_K|$, et

$$I = \int r^d\, \varphi(rX)\, \exp(-i\Lambda_K \cdot X)\, f(X)\, \mathrm{d}X\,.$$

En développant $f(X)$, on obtient

$$I = \sum_J c_J\, \Phi\left(\frac{\Lambda_J - \Lambda_K}{r}\right) = c_K$$

en vertu de (2.8). D'autre part, en posant $|f(X)| = |X|\ \eta(X) = o(|X|)$ $(|X| \to 0)$, on a

$$|I| \leq \int r^d\, |\varphi(rX)|\, |X|\, \eta(|X|)\, \mathrm{d}X = \frac{1}{r} \int |\varphi(Y)|\, |Y|\, \eta\left(\frac{Y}{r}\right)\, \mathrm{d}Y\,,$$

ce qui, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, est $o\left(\frac{1}{r}\right)$ quand $n \to \infty$. D'où $c_K = o\left(\frac{1}{|\Lambda_K|}\right)$, ce qui contredit (2.16).

2.9. Pour appliquer la proposition 2.8 à $\ell(\alpha, \beta)$, il convient de préciser les fréquences et les coefficients. A partir de 2.0, on peut écrire

$$\ell(\alpha,\beta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} \left(\cos(2^n\alpha \pm \varphi) + \cos(2^n\beta \pm \varphi) + \cos(2^n\gamma \pm \varphi)\right) \tag{2.17}$$

avec $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $\pm = (-1)^n$.

Les fréquences sont de la forme $\varepsilon(2^n, 0)$, $\varepsilon(0, 2^n)$, $\varepsilon(2^n, 2^n)$ $(n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\})$, et les coefficients ont pour valeur absolue $\frac{1}{4}2^{-n}$. Les conditions (2.8) et (2.16) sont bien réalisées, et le point 4 de la proposition 2.1 résulte immédiatement de la proposition 2.8.

2.10. Un peu plus de travail est nécessaire pour le point 5. On est maintenant amené à considérer la fonction

$$f(h) = \ell(\alpha + h\cos\theta, \beta + h\sin\theta)\,. \tag{2.18}$$

Convenons d'écrire (2.17) sous la forme

$$\ell(\alpha, \beta) = \sum a_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda\alpha + \mu\beta)}\,,$$

les fréquences étant de la forme indiquée en 2.9, et les coefficients correspondants étant

$$a_{2^n,0} = a_{0,2^n} = a_{-2^n,-2^n} = \frac{1}{4}(-1)^n 2^{-n} \exp((-1)^n i\varphi),$$
$$a_{-2^n,0} = a_{0,-2^n} = a_{2^n,2^n} = \frac{1}{4}(-1)^n 2^{-n} \exp(-(-1)^n i\varphi).$$

On peut alors écrire (2.18) sous la forme

$$f(h) = \sum a_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda\alpha+\mu\beta)} e^{ih(\lambda\cos\theta+\mu\sin\theta)}. \tag{2.19}$$

Le spectre de $\ell(\alpha,\beta)$ est $S(\ell) = S \cup (-S)$ (cf. figure 4), et le spectre de $f$ s'obtient en projetant $S(\ell)$ sur l'axe $Oz$ tel que $(Ox, Oz) = \theta$ ; il est bien lacunaire au sens de (2.8). Reste à examiner si la condition (2.16) est réalisée.

Lorsque $\operatorname{tg}\theta$ est irrationnel, la projection est bijective, le produit des modules des coefficients de $f$ par les valeurs absolues des fréquences est minoré par un nombre strictement positif, donc (2.16) a lieu, la proposition 2.8 s'applique, et il en résulte que $f(h)$ est non dérivable en 0 quels que soient $\alpha$ et $\beta$. C'est dire que, pour aucun choix de $(\alpha,\beta)$, $a$, et $\operatorname{tg}\theta$ irrationnel, (2.6) n'a lieu.

Lorsque $\operatorname{tg}\theta$ est rationnel, il correspond à la fréquence $\nu$ de $f$ le coefficient

$$c_\nu = \sum a_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda\alpha+\mu\beta)} \qquad (\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = \nu). \tag{2.20}$$

Le nombre de termes figurant dans la somme (2.20) peut être 1, 2, 3 ou infini. La condition (2.16) est réalisée quand, pour une infinité de valeurs de $\nu$, la somme se réduit à un terme, ou qu'elle est comparable au terme dominant (au sens que le rapport des valeurs absolues est compris entre deux nombres positifs fixes). Lorsqu'il en est ainsi, on a la même propriété de non-différentiabilité de la fonction $\ell$ en $(\alpha,\beta)$ dans la direction $\theta$ que lorsque $\operatorname{tg}\theta$ est irrationnel.

Quand la somme comporte deux termes et qu'elle n'est pas comparable au terme dominant, c'est (en dehors des petites valeurs $\lambda = \pm 1, \mu = \pm 1$) que les $(\lambda,\mu)$ concernés sont de la forme $(0,2^n)$ et $(2^n,2^n)$, ou $(2^n,0)$ et $(2^n,2^n)$, ou $(0,-2^n)$ et $(-2^n,-2^n)$, ou $(-2^n,0)$ et $(-2^n,-2^n)$, ou $(0,2^n)$ et $(-2^n,0)$, ou $(0,-2^n)$ et $(2^n,0)$.

L'examen des valeurs correspondantes des $a_{\lambda,\mu}$ montre 1°) que si la somme n'est pas comparable au terme dominant, c'est qu'elle est nulle, 2°) que la condition de nullité s'exprime par $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et, suivant le cas, par $2^n\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou $2^n\beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou $2^n(\alpha+\beta) \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Ce sont les cas d'exception a).

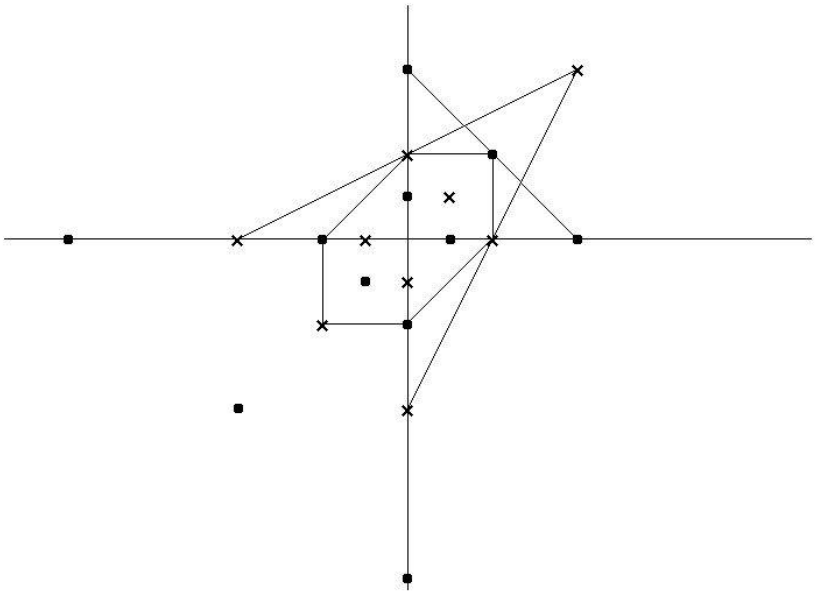

FIGURE 4
Les points de $S$ sont représentés par $\bullet$, ceux de $-S$ par $\times$

Quand la somme comporte trois termes, ils correspondent à des valeurs de $n$ différentes, et la condition que la somme ne soit pas comparable au terme dominant impose que, le terme dominant étant d'ordre $n$, les autres soient d'ordre $n+1$. On vérifie alors que les $(\lambda, \mu)$ concernés appartiennent tous trois à $S$ ou tous trois à $-S$. De nouveau, la somme doit être nulle si elle n'est pas comparable au terme dominant. On distingue trois cas (voir figure 4):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\theta = 1\,, && \exp(2^{n+1}i\alpha) - 2\exp(2^n i(\alpha+\beta)) + \exp(2^{n+1}i\beta) = 0\,,\\
&\operatorname{tg}\theta = -2\,, && \exp(2^{n+1}i(\alpha+\beta)) - 2\exp(2^n i\beta) + \exp(-2^{n+1}i\alpha) = 0\,,\\
&\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}\,, && \exp(2^{n+1}i(\alpha+\beta)) - 2\exp(2^n i\alpha) + \exp(-2^{n+1}i\beta) = 0\,.
\end{aligned}$$

Dans chacun de ces cas, les trois exponentielles écrites doivent être égales. Cela donne respectivement $2^n(\alpha-\beta) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $2^n(2\alpha+\beta) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $2^n(\alpha+2\beta) \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Ce sont les cas d'exception b).

Les valeurs exceptionnelles de $\operatorname{tg}\theta$ ($0, -1, \infty$ dans le cas a), $1, -2, -\frac{1}{2}$ dans le cas b)) apparaissent dans la démonstration. Elles sont également en évidence dans les conclusions, lorsqu'on les écrit, comme nous venons de le faire, sans faire intervenir $\gamma$.

## 3. ÉTUDE DÉTAILLÉE DE LA FONCTION $x(t)$

3.1. Rappelons que (cf. n$^{os}$ 1.15 et 2.1)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \dots \\ &= \frac{1 - L(0,2t)}{2} = \frac{1 - \ell(0,2t)}{2} \end{aligned}$$

en choisissant $\varphi = 0$ dans 2.1.3. La fonction $x$ est paire de période $\pi$ et vérifie $x(\pi - t) = x(t)$. D'après la proposition 2.1,

$$|x(t+h) - x(t)| = O\Big(|h| \log \frac{1}{|h|}\Big)$$

$$|x(t+h) + x(t-h) - 2x(t)| = O\left(|h|\right)$$

$x$ est partout non dérivable.

La non-dérivabilité en tout point est connue depuis Hardy [3], mais la preuve de Hardy est moins facile que celle donnée ici (cf. proposition 2.8) et elle a dissuadé Zygmund d'inclure ce résultat dans son traité *Trigonometrical Series* [7].

Précisons encore ce point. On dit qu'une fonction $f$ de variable réelle est *lisse* au point $t$ si

$$f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = o(h) \qquad (h \to 0)$$

(définition de Zygmund). Toute fonction dérivable est lisse. Montrons que

*$x$ n'est lisse nulle part.*

En effet,

$$x(t+h) + x(t-h) - 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cos 2^n t (\cos 2^n h - 1)$$

et, pour $t$ fixé, c'est une série lacunaire en $h$, avec des fréquences $2^n$ et des coefficients qui ne sont pas $o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ; la proposition 2.8 montre que c'est une fonction de $h$ qui n'est dérivable en aucun point, et en particulier qu'elle n'est pas $o(|h|)$ quand $h \to 0$.

On connaît aujourd'hui beaucoup de propriétés des fonctions de Hardy-Weierstrass, utilisant des méthodes de théorie ergodique. Un article récent de Ai-hua Fan et Jörg Schmeling fait le point sur leur analyse multifractale, qui

donne la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où l'accroissement de la fonction (ici $x(t+h)-x(t)$) a un comportement fixé, par exemple $O(h)$ (points lents) ou $\alpha h \log \frac{1}{|h|}(1+o(h))$ (points $\alpha$-rapides) (partie 7 de [2]). Notre étude n'aborde pas cet aspect.

Dans cette partie, nous aurons besoin d'étudier les variations de polynômes trigonométriques. Nous les mettrons sous formes polynomiales de la variable

$$\xi = 2\cos(2t)\,.$$

A l'aide des suites de Sturm (cf., par exemple, [6] ou [5]), on sait que l'on peut localiser les racines d'un polynôme avec la précision souhaitée. Les calculs ont été faits avec le logiciel de calcul formel MAPLE (cf. [4]).

3.2. Nous poserons, pour $j = 1, 2, \ldots$

$$P_j(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \ldots + \frac{(-1)^j}{2^j}\sin^2 2^j t\,.$$

Par exemple, $P_0(t) = \sin^2 t$, $P_1(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t$. On a

$$\begin{aligned}
&P_j'(t) = \sin 2t - \sin 4t + \sin 8t + \ldots + (-1)^j \sin 2^{j+1} t\\
&x(t) = P_{j-1}(t) + (-1)^j 2^{-j} P_{j-1}(2^j t) + (-1)^{2j} 2^{-2j} P_{j-1}(2^{2j} t) + \ldots\\
&x(t) = P_j(t) + (-1)^{j+1} 2^{-j-1} x(2^{j+1} t)\\
&x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(2t) + x(t)\,.
\end{aligned}$$

3.3. On aura besoin de quelques valeurs de $x(t)$. Il est clair que $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Utilisant 3.2, il vient

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,,\\
x\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\left(\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

d'où $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,\\
x\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{4}x\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{5}\right) + \frac{1}{4}x\left(\frac{\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

d'où, puisque $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$,

$$x\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{3\sqrt{5}-5}{12} = -0.1423503\ldots,$$

$$x\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin^2\frac{\pi}{10} - \frac{1}{2}x\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{3\sqrt{5}-5}{24} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{40}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{40} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{20} + \frac{1}{4}x\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{20} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{10} + \frac{1}{24} \\ &= \frac{7}{24} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{20} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{10} = 0.035586\ldots, \end{aligned}$$

$$x\left(\frac{19\pi}{40}\right) = \cos\frac{\pi}{20} + x\left(\frac{\pi}{40}\right) = \frac{7}{24} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{20} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{10} = 1.023274\ldots$$

3.4. LEMME. *On a* $|x(t)| \leq \frac{8}{3}|t|$ *pour tout* $t$.

Observons que

$$P_1(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t = \sin^2 t(1 - 2\cos^2 t)$$

donc

$$|P_1(t)| \leq \sin^2 t \leq \min(t^2, 1)$$

et que

$$x(t) = P_1(t) + \frac{1}{4}P_1(4t) + \frac{1}{4^2}P_1\left(4^2 t\right) + \ldots$$

donc

$$|x(t)| \leq t^2\left(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^\ell\right) + \frac{1}{4^{\ell+1}} + \frac{1}{4^{\ell+2}} + \ldots \leq t^2 4^\ell \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\frac{1}{4^{\ell+1}}$$

pour tout $\ell$ entier positif. Si $|t| \leq 1$, choisissons $\ell$ de façon que $4^{-\ell-1} \leq |t| < 4^{-\ell}$. On a alors $|x(t)| \leq |t| \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{3}|t| = \frac{8}{3}|t|$. D'autre part, $|x(t)| \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{4}{3}$ pour tout $t$.

3.5. LEMME. *On a*

$$0.42 < \limsup_{t\to 0}\frac{x(t)}{t} \leq \frac{8}{3} \quad \textit{et} \quad \liminf_{t\to 0}\frac{x(t)}{t} = -\limsup_{t\to 0}\frac{x(t)}{t}.$$

Cette dernière assertion résulte de l'égalité

$$\frac{x(t)}{t} = \frac{\sin^2 t}{t} - \frac{x(2t)}{2t}.$$

Comme $x$ est paire, on peut désormais supposer $t > 0$. L'inégalité de droite résulte du lemme 3.4. Celle de gauche équivaut à

$$\liminf_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} < -0.42\,.$$

Pour l'établir, on choisit $t_0 = \dfrac{\pi}{1280}$, on vérifie que $\dfrac{x(t_0)}{t_0} = -0.4261\ldots$ et on utilise le fait que, si $t \in (0,\pi)$,

$$\frac{x(t/4)}{t/4} = \frac{P_1(t/4)}{t/4} + \frac{x(t)}{t} = \frac{\sin^2(t/4)(1-2\cos^2(t/4))}{t/4} + \frac{x(t)}{t} < \frac{x(t)}{t}\,.$$

Nous prouverons en 3.31 que $\liminf_{t\to 0} \dfrac{x(t)}{t} = -0.426940988418\ldots$

3.6. Ainsi, au voisinage de $t = 0$, $x(t)/t$ oscille entre deux valeurs opposées à la manière de $\sin \frac{\pi \log t}{\log 2}$, mais avec un comportement local très irrégulier.

3.7. Dans la suite nous mettrons en évidence des valeurs de $t$ remarquables, entre autres celles où sont atteints le maximum et le minimum de $x(t)$. Nous distinguerons les extrema locaux, c'est-à-dire les points $t$ tels que $x(t+h) - x(t)$ ait un signe constant quand $0 < |h| < h(t)$, les «points de traverse» pour lesquels $\frac{1}{h}(x(t+h) - x(t))$ a un signe constant quand $h$ est assez petit et non nul ($0 < |h| < h(t)$), les points «lents» pour lesquels

$$x(t+h) - x(t) = O(|h|) \qquad (h \to 0)$$

(nous savons qu'en aucun point $t$ on n'a $x(t+h) - x(t) = o(|h|) \quad (h \to 0)$), les points «rapides» pour lesquels

$$|x(t+h) - x(t)| > c|h| \log \frac{1}{|h|}$$

pour un $c = c(t) > 0$ et tout $|h|$ assez petit et différent de 0 (nous savons qu'on a partout $|x(t+h) - x(t)| \le C|h| \log \frac{1}{|h|}$).

Remarquons, comme nous l'avons déjà fait dans la partie 2 (voir 2.6) qu'un extremum local est un point lent. Moyennant l'addition d'une fonction affine de pente assez grande, un point lent devient un point de traverse. Un point de traverse rapide reste un point de traverse rapide lorsqu'on modifie $x(t)$ en lui ajoutant une fonction de classe $C^1$.

Commençons par un cas simple.

3.8. PROPOSITION. *Soit* $t = k\pi/2^n$, *avec* $k \in \mathbf{Z}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Alors,* $t$ *est un point lent :*

$$x(t+h) - x(t) = O(|h|) \qquad (h \to 0).$$

*De plus*

$$\limsup_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} + \liminf_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = 2P'_{n-1}(t)$$

*et*

$$P'_{n-1}(t) + 0.42 < \limsup_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \leq P'_{n-1}(t) + \frac{8}{3}.$$

(*On convient que* $P_{-1}(0) = 0$. *On notera que* $\left|P'_{n-1}(t)\right| \leq n$.)

Pour $u \in \mathbf{Z}\pi/2$, on a $(\sin^2 u)' = \sin 2u = 0$, et $P'_0(u) = 0$. Pour $n = 0$ ou 1, la proposition résulte donc du lemme 3.5.

Soit $t = k\pi/2^n$ avec $k \in \mathbf{Z}$, $n > 1$. On a

$$x(u) = P_{n-1}(u) + (-1)^n 2^{-n} x\left(2^n u\right)$$

donc

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{P_{n-1}(t+h) - P_{n-1}(t)}{h} + (-1)^n \frac{x(k\pi + 2^n h) - x(k\pi)}{2^n h}$$

et la proposition résulte du lemme 3.5.

3.9. Limitons-nous aux valeurs de $t$ commensurables à $\pi$ et comprises entre 0 et $\pi$ : $t \in \mathbf{Q}\pi \cap (0, \pi)$. La suite $2^n \frac{t}{\pi}$ mod 1 prend un nombre fini de valeurs, donc $2^{j+p}\frac{t}{\pi} \equiv 2^j \frac{t}{\pi}$ (mod 1) pour un couple $(j, p) \in \mathbf{N}^2$. Excluons le cas $2^j \frac{t}{\pi} \equiv 0$ (mod 1) qui vient d'être considéré. Choisissons $p$ minimum, $p = p\left(\frac{t}{\pi}\right)$ (la période) et $j$ minimum, $j = j\left(\frac{t}{\pi}\right)$ (le début). Le développement dyadique de $\frac{t}{\pi}$ est de la forme

$$\frac{t}{\pi} = 0.\underbrace{d_0 d_1 \ldots d_{j-1}}_{\text{début}}\ \underbrace{a_0 a_1 \ldots a_{p-1}}_{\text{période}}\ \underbrace{a_0 a_1 \ldots a_{p-1}}\ \underbrace{a_0 a_1 \ldots a_{p-1}} \ldots$$

Posons

$$\begin{aligned}
\frac{t_0}{\pi} &= 0.a_0a_1\ldots a_{p-1}\ a_0a_1\ldots a_{p-1}\ldots \\
\frac{t_1}{\pi} &= 0.a_1a_2\ldots a_{p-1}a_0\ a_1\ldots a_{p-1}a_0\ldots \\
&\vdots \\
\frac{t_{p-1}}{\pi} &= 0.a_{p-1}a_0\ldots a_{p-2}\ a_{p-1}a_0a_1\ldots a_{p-2}\ldots \\
\frac{t_p}{\pi} &= 0.a_0a_1\ldots a_{p-1}\ a_0a_1\ldots a_{p-1}\ldots = \frac{t_0}{\pi}
\end{aligned}$$

et

$$H = \sin 2t_0 - \sin 2t_1 + \ldots + (-1)^{p-1}\sin 2t_{p-1}\,.$$

PROPOSITION. *Si $p$ est pair et $H \neq 0$, $t$ est un point de traverse rapide. Si $p$ est pair et $H = 0$, $t$ est un point lent. Si $p$ est impair, $t$ est un point lent et n'est pas un extremum local si $j\left(\frac{t}{\pi}\right) = 0$.*

Ainsi, lorsque $j\left(\frac{t}{\pi}\right) = 0$, $t$ est soit un point de traverse rapide soit un point lent, et $t$ ne peut être un extremum local que si $p$ est pair et $H = 0$.

EXEMPLES :

$$\begin{aligned}
&t = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} && p = 2, \quad H \neq 0 \\
&t = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} && p = 4, \quad H = 0 \\
&t = \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} && p = 3, \quad H \neq 0\,.
\end{aligned}$$

On sait que $j\left(\frac{t}{\pi}\right) = 0$ signifie que, lorsque $\frac{t}{\pi}$ est écrit sous forme de fraction irréductible, le dénominateur est impair (si $q$ est premier impair, $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q$).

Distinguons les différents cas pour la démonstration.

1. *$p$ pair*, $H \neq 0$, $j = 0$. Rappelons que, pour tout entier $\ell$, et tout réel $\theta$,

$$x(\theta) = P_\ell(\theta) + \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}}\, x\left(2^{\ell+1}\,\theta\right).$$

Choisissons $\ell = kp - 1$ et $\theta = t + h$. On a

$$x(t+h)-x(t)=P_\ell(t+h)-P_\ell(t)+R, \qquad |R|\le 2^{-\ell+1}$$

$$P_\ell(t+h)-P_\ell(t)=h\,P'_\ell(t)+\frac{h^2}{2}P''_\ell(t+h'),$$

$$\begin{aligned}P'_\ell(t)&=\sin 2t-\sin 4t+\ldots+(-1)^\ell\sin 2^{\ell+1}t\\&=(\sin t_1-\sin t_2+\ldots-\sin t_p)+(\sin t_1-\sin t_2+\ldots-\sin t_p)+\ldots\\&=k(\sin t_1-\sin t_2+\ldots-\sin t_p)=kH,\end{aligned}$$

$$|P''_\ell(\theta)|\le 2+4+\ldots+2^{\ell+1}<2^{\ell+2}.$$

En prenant $k=\left\lfloor\frac{1}{p\log 2}\log\frac{1}{|h|}\right\rfloor$, on a

$$x(t+h)-x(t)=\frac{H}{p\log 2}h\log\frac{1}{|h|}+O(|h|) \qquad (|h|\to 0)$$

donc $t$ est un point de traverse rapide.

2. *$p$ pair*, $H\neq 0$, $j>0$. On se ramène au cas précédent en soustrayant de $x(\theta)$ le début de son développement.

3. *$p$ pair*, $H=0$, $j=0$. Choisissons encore $\ell=kp-1$. Alors, $P'_\ell(t)=0$ et

$$P_\ell(t+h)-P_\ell(t)=\frac{h^2}{2}P''_\ell(t)+\frac{h^3}{6}P'''_\ell(t+h').$$

On a $P'''_\ell(\theta)\le 2^2+4^2+\ldots+2^{2(\ell+1)}<4^{\ell+2}$. En choisissant $k$ comme en 1, on a $2^{-\ell-p-1}\le|h|<2^{-\ell}$, et l'on obtient

$$|x(t+h)-x(t)|\le K|h| \qquad (K=K(t))$$

donc $t$ est un point lent.

4. *$p$ pair*, $H=0$, $j>0$. On se ramène au cas précédent en soustrayant de $x(\theta)$ le début de son développement.

5. *$p$ impair*. En choisissant $\ell=2kp-1$, on a $P'_\ell(t)=0$ parce que

$$P'_\ell(t)=(\sin t_1-\sin t_2+\ldots-\sin t_p)-(\sin t_1-\sin t_2+\ldots-\sin t_p)+\text{ etc.}$$

et l'on conclut comme en 3. et 4. que $t$ est un point lent. Reste à montrer que, lorsque $j\left(\frac{t}{\pi}\right)=0$, c'est-à-dire

$$\frac{t}{\pi}=0.a_0a_1\ldots a_{p-1}\,a_0a_1\ldots a_{p-1}\ldots, \qquad 2^pt\equiv t \pmod 1,$$

$t$ n'est pas un extremum relatif. Supposons pour fixer les idées que $t$ est un minimum relatif. Comme ce n'est pas un point lisse au sens de Zygmund

(voir n°3.1), on a

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{x(t+h)+x(t-h)-2x(t)}{|h|} > 0\,.$$

Mais on a aussi

$$x(\theta) = P_{p-1}(\theta) - \frac{1}{2^p} x(2^p\theta)$$

donc

$$\begin{aligned} P_{p-1}(t+h)+P_{p-1}(t-h)-2P(t) &= x(t+h)+x(t-h)-2x(t) \\ &\quad + \frac{1}{2^p}\left(x(t+2^p h)+x(t-2^p h)-2x(t)\right) \end{aligned}$$

et il s'ensuit que $P_{p-1}$ n'est pas lisse. La contradiction établit bien que $t$ n'est pas un extremum relatif.

3.10. Dans la suite (n$^{\text{os}}$ 3.10–3.20), nous étudierons les cas $t = \frac{\pi}{5}$ et $t = \frac{19\pi}{40}$. Pour obtenir des résultats globaux, il nous faut préciser numériquement certains résultats de 3.9. Jusqu'au n°3.13, on pose

$$\begin{aligned} f(t) = P_3(t) &= \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t \\ &= \frac{5}{16} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \frac{1}{16}\cos 16t \\ &= \frac{1}{32}\left(\xi^8 - 8\xi^6 + 18\xi^4 - 4\xi^2 - 8\xi\right) \qquad (\xi = 2\cos 2t)\,. \end{aligned}$$

On a (cf. n°3.2)

$$x(t) = f(t) + \frac{1}{16} f(16t) + \frac{1}{16^2} f\left(16^2 t\right) + \dots$$

LEMME. 1. $f\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{64}(5-3\sqrt{5}) = -0.1334534\dots$

2. $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$.

3. *Il existe des nombres* $\sigma_1 = 0.15093\dots$, $\sigma_2 = 0.37970\dots$, $\sigma_3 = 1.36633\dots$ *tels que* $f(t)$ *soit strictement décroissante sur* $[0,\sigma_1]$, $\left[\sigma_2, \frac{\pi}{5}\right]$ *et* $\left[\frac{2\pi}{5}, \sigma_3\right]$ *; strictement croissante sur* $[\sigma_1,\sigma_2]$, $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right]$ *et* $\left[\sigma_3, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. $f(t) \geq f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *pour tout* $t$, $f(t) > f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *pour tout* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \neq \frac{\pi}{5}$.

5. $f(t) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *pour tout* $t$.

On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{4\pi}{5} - \frac{1}{8}\sin^2\frac{8\pi}{5} \\ &= \sin^2\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{5} - \frac{1}{8}\sin^2\frac{2\pi}{5} \\ &= \frac{5}{8}\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{5}{16}\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

d'où 1. On trouve de même

$$f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5}{64}(5+3\sqrt{5}) = 0.91470\ldots$$

Ensuite,

$$f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} - \sin\frac{16\pi}{5} = 0$$

et de même,

$$f'\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0\,.$$

On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sin 2t\left(\xi^7 - 6\xi^5 + 9\xi^3 - \xi - 1\right) \\ &= -\sin 2t\left(\xi^2+\xi-1\right)\left(\xi^5 - \xi^4 - 4\xi^3 + 3\xi^2 + 2\xi + 1\right). \end{aligned}$$

Le premier facteur a pour racines $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ ; le second a trois racines réelles

$$1.90955\ldots = 2\cos 2\sigma_1,\ 1.45048\ldots = 2\cos 2\sigma_2,\ -1.83510\ldots = 2\cos 2\sigma_3\,.$$

D'où les variations de $f$ :

| $t$ | $0$ | | $\sigma_1$ | | $\sigma_2$ | | $\frac{\pi}{5}$ | | $\frac{2\pi}{5}$ | | $\sigma_3$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-0.050$ | $\nearrow$ | $0.148$ | $\searrow$ | $-0.133$ | $\nearrow$ | $0.914$ | $\searrow$ | $0.888$ | $\nearrow$ | $1$ |

Plus précisément trois des extréma sont

$$f(\sigma_1) = -.05022\ldots,\quad f(\sigma_2) = 0.14834\ldots,\quad f(\sigma_3) = 0.88835\ldots$$

Le tableau de variation ci-dessus implique les points 3, 4 et 5.

3.11. De la même façon, on détermine les variations de $f'$ et $f''$. On a

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2\cos 2t - 4\cos 4t + 8\cos 8t - 16\cos 16t \\ &= -8\xi^8 + 64\xi^6 - 156\xi^4 + 110\xi^2 + \xi - 4 \\ f'''(t) &= -4\sin 2t + 16\sin 4t - 64\sin 8t + 256\sin 16t \\ &= -4\sin 2t\left(-64\xi^7 + 384\xi^5 - 624\xi^3 + 220\xi + 1\right). \end{aligned}$$

Les extrema de $f'$ et $f''$ sont donnés dans les tableaux suivants (où les valeurs numériques sont données par défaut).

| $t$ | 0 | 0.079 | 0.275 | 0.500 | 0.737 | 0.835 | 1.063 | 1.307 | 1.472 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | 0 | | 1.391 | | 1.124 | | 3.505 | | 0.870 | |
| | | −0.516 | | −1.814 | | 0.865 | | −0.366 | | 0 |

| $t$ | 0 | 0.182 | 0.389 | 0.606 | 0.786 | 0.962 | 1.182 | 1.387 | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | 15.38 | | 20.21 | | 18.81 | | 11.64 | |
| | −10 | | −22.60 | | −4.002 | | −25.45 | | −14 |

3.12. PROPOSITION. *Sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}]$, *la fonction* $x(t)$ *atteint son minimum au seul point* $\pi/5$. (*Rappelons que* $x(\pi/5) = -\dfrac{3\sqrt{5}-5}{12} = -0.1423503\ldots$)

Posons encore $f_j(t) = \dfrac{1}{16^j} f\left(16^j t\right)$. On a

$$\begin{aligned} f_j(t) &\geq \frac{1}{16^j} f\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{(lemme 3.10.4)} \\ &= \frac{1}{16^j} f\left(16^j \frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{car } \frac{16^j\pi}{5} - \frac{\pi}{5} \in \mathbf{Z}\pi \\ &= f_j\left(\frac{\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \ldots \geq f_0\left(\frac{\pi}{5}\right) + f_1\left(\frac{\pi}{5}\right) + f_2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \ldots = x\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

avec inégalité stricte si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \neq \frac{\pi}{5}$ (lemme 3.10.4).

3.13. PROPOSITION. *Pour* $-\frac{\pi}{30} \leq h \leq 0$, *on a*

$$x\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-x\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0.022\,|h|\,.$$

Supposons $-\frac{\pi}{30} \leq h \leq 0$. Alors $\frac{\pi}{6} = 0.52\ldots \leq \frac{\pi}{5}+h \leq \frac{\pi}{5} = 0.62\ldots$, donc, d'après 3.11,

$$f''(t) \geq \min\left(f''\left(\frac{\pi}{6}\right), f''\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \min\left(7,\ \frac{5(3\sqrt{5}+1)}{2}\right) = 7$$

pour $\frac{\pi}{5}+h \leq t \leq \frac{\pi}{5}$. Comme $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$ (lemme 3.10.2), on a

$$f\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq \frac{7}{2}h^2\,. \tag{3.1}$$

Définissons l'entier $n$ par

$$16^n|h| \leq \frac{\pi}{30} < 16^{n+1}|h|\,. \tag{3.2}$$

Notons que

$$16^n|h| > \frac{1}{16}\,\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{480}\,. \tag{3.3}$$

Pour tout entier $j \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_j\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-f_j\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{1}{16^j}\left(f\left(16^j\left(\frac{\pi}{5}+h\right)\right)-f\left(16^j\frac{\pi}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16^j}\left(f\left(\frac{\pi}{5}+16^j h\right)-f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

car $16^j\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5} \in \mathbf{Z}\pi$. Si $j \leq n$, on a $16^j|h| \leq \frac{\pi}{30}$ d'après (3.2), donc, d'après (3.4) et (3.1),

$$f_j\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-f_j\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq \frac{1}{16^j}\,\frac{7}{2}\,\left(16^j h\right)^2 = \frac{7}{2}\,16^j h^2\,.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-x\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(f_j\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-f_j\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \\ &\geq \frac{7}{2}\,h^2\left(1+16+16^2+\ldots+16^n\right) \geq \frac{7}{2}\,h^2\,16^n \\ &\geq \frac{7}{2}\,|h|\,\frac{\pi}{480}\,, \qquad \text{d'après (3.3)} \\ &\geq 0.022\,|h|\,. \end{aligned}$$

3.14. LEMME. *Pour* $0 \leq h \leq \frac{\pi}{30}$, *on a*

$$x\left(\frac{4\pi}{5}+h\right)-x\left(\frac{4\pi}{5}\right) \geq 0.022\, h\,.$$

Cela résulte de la proposition 3.13 puisque $x(\pi-t)=x(t)$ et en particulier $x\left(\frac{4\pi}{5}\right)=x\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3.15. LEMME. *Soit* $P_1(t)=\sin^2 t-\frac{1}{2}\sin^2 2t$ *(cf.* 3.2*). Si* $t \in \left[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{120}\right]$, *on a* $P_1'(t) \geq 0.363$.

On a $P_1'(t)=\sin 2t-\sin 4t$. Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction $t \mapsto \sin 2t$ est croissante, la fonction $t \mapsto \sin 4t$ est décroissante et la fonction $P_1'$ est croissante. Ainsi, pour $\frac{\pi}{5} \leq t \leq \frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{120} < \frac{\pi}{4}$, on a $P_1'(t) \geq P_1'\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0.363$.

3.16. PROPOSITION. *Pour* $0 \leq h \leq \frac{\pi}{120}$, *on a*

$$x\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-x\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0.385\, h\,.$$

Par 3.2, on a $x(t)=P_1(t)+\frac{1}{4}x(4t)$. Comme $0 \leq 4h \leq \frac{\pi}{30}$, on a, d'après le lemme 3.14,

$$\frac{1}{4}\left(x\left(\frac{4\pi}{5}+4h\right)-x\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \geq 0.022\,\frac{4h}{4}=0.022\, h\,.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P_1\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-P_1\left(\frac{\pi}{5}\right) &= h\, P_1'\left(\frac{\pi}{5}+h'\right), \quad \text{où } 0 \leq h' \leq h \\ &\geq 0.363\, h, \quad \text{d'après le lemme 3.15.} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-x\left(\frac{\pi}{5}\right) &= P_1\left(\frac{\pi}{5}+h\right)-P_1\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(x\left(\frac{4\pi}{5}+4h\right)-x\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \\ &\geq 0.363\, h+0.022\, h=0.385\, h\,. \end{aligned}$$

3.17. LEMME. *Soit* $P_2(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t$ *(cf. 3.2). Si* $t \in \left[\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $-0.13 \leq P_2'(t) \leq 0$.

On procède comme en 3.10 et 3.11. On a, avec $\xi = 2\cos 2t$

$$P_2'(t) = \sin 2t - \sin 4t + \sin 8t = -\sin 2t\left(-\xi^3 + 3\xi - 1\right)$$
$$P_2''(t) = 2\cos 2t - 4\cos 4t + 8\cos 8t = 4\xi^4 - 18\xi^3 + \xi + 12.$$

La dérivée $P_2'$ s'annule pour $t \in \{\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\}$ tandis que la dérivée seconde a quatre zéros dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ : $0.178\ldots, 0.538\ldots, 1.007\ldots, 1.472\ldots$ ; le lemme résultera du tableau de variation :

| $t$ | $\frac{4\pi}{9} = 1.396$ | | $1.472$ | | $\frac{\pi}{2} = 1.570$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_2''(t)$ | $-3.554$ | $-$ | $0$ | $+$ | $2$ |
| $P_2'(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-0.12933$ | $\nearrow$ | $0$ |

3.18. LEMME. *Sur l'intervalle* $\left[\frac{91\pi}{192}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[\frac{19\pi}{40} - \frac{\pi}{960}, \frac{\pi}{2}\right]$, *la fonction* $x(t)$ *atteint son maximum au seul point* $19\pi/40 = 1.492\ldots$

On utilise la formule de 3.2

$$x\left(\frac{19\pi}{40} + h\right) - x\left(\frac{19\pi}{40}\right) = \left[P_2\left(\frac{19\pi}{40} + h\right) - P_2\left(\frac{19\pi}{40}\right)\right] - \left\{\frac{1}{8}\left(x\left(\frac{19\pi}{5} + 8h\right) - x\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right)\right\}. \tag{3.5}$$

Si l'on a $-\frac{\pi}{960} \leq h < 0$, par le lemme 3.17, le crochet ci-dessus est majoré par $0.13\,|h|$ et, en appliquant la relation $x(4\pi - t) = x(\pi - t) = x(t)$ et la proposition 3.16, l'accolade de (3.5) vaut

$$\frac{1}{8}\left(x\left(\frac{\pi}{5} - 8h\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \geq \frac{1}{8}\,0.385\,(-8h) = 0.385\,|h|.$$

Il s'ensuit que

$$x\left(\frac{19\pi}{40} + h\right) - x\left(\frac{19\pi}{40}\right) \leq 0.13\,|h| - 0.385\,|h| = -0.255\,|h| < 0.$$

Si l'on a $0 < h \leq \frac{\pi}{40}$, l'étude des variations de $P_2'$ donnée en 3.17 montre que, dans (3.5), le crochet est strictement négatif, tandis que, par le

lemme 3.10.4, l'accolade vaut

$$\frac{1}{8}\left(x\left(\frac{\pi}{5}-8h\right)-x\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\geq 0$$

et l'on a encore

$$x\left(\frac{19\pi}{40}+h\right)-x\left(\frac{19\pi}{40}\right)<0.$$

3.19. LEMME. *Soit* $t_0=\frac{p\pi}{2^n}$ *avec* $p\in\mathbf{Z}$ *et* $n\in\mathbf{N}$. *Pour tout* $t\in\mathbf{R}$, *on a*

$$x(t)-x(t_0)\leq|x(t)-x(t_0)|\leq n|t-t_0|+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par 3.2, il vient

$$|x(t)-x(t_0)|=\left|\frac{1}{2^n}x(2^nt)+P_{n-1}(t)-P_{n-1}(t_0)\right|\leq\frac{2}{2^n}+n|t-t_0|$$

car $|P'_{n-1}(t)|\leq n$ pour tout $t$ et $x(2^nt_0)=x(p\pi)=x(0)=0$.

3.20. PROPOSITION. *Sur l'intervalle* $[0,\frac{\pi}{2}]$, *la fonction* $x(t)$ *atteint son maximum* $1.023274\ldots$ *au seul point* $19\pi/40$.

Par le lemme 3.18, il suffit de montrer que le maximum de $x(t)$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{91}{192}\pi\right]$ est strictement inférieur à $x\left(\frac{19}{40}\pi\right)$. Or $\frac{91}{192}\pi<\frac{7766}{16384}\pi<\frac{19}{40}\pi$. On applique le lemme 3.19 avec $n=14$, $2^n=16384$ et $p=1,3,5,\ldots,7765$. On obtient

$$\max_{0\leq t\leq\frac{7766}{16384}\pi}x(t)\leq\max_{p\in\{1,3,\ldots,7765\}}x\left(\frac{p\pi}{2^{14}}\right)+\left(14\frac{\pi}{2^{14}}+\frac{1}{2^{13}}\right).$$

Pour $p=1,3,5,\ldots,7765$, on calcule $x\left(\frac{p\pi}{2^{14}}\right)$ ; la plus grande valeur est obtenue pour $p=7765$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq\frac{7766}{16384}\pi}x(t)&\leq x\left(\frac{7765\pi}{2^{14}}\right)+\frac{7\pi+1}{2^{13}}\\&<1.0175+0.0029=1.0204<x\left(\frac{19}{40}\pi\right).\end{aligned}$$

On peut réduire considérablement les calculs à l'aide de l'algorithme de dichotomie suivant.

3.21. Soit $f$ une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{D}$ une partie fermée de $[a,b]$. On veut déterminer une valeur par défaut de $\max_{t\in\mathcal{D}} f(t)$ et une valeur par excès. L'intervalle $[a,b]$ a deux enfants $[a,\frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2},b]$, quatre petits-enfants $[a,\frac{3a+b}{4}],\dots,[\frac{a+3b}{4},b]$, etc., $2^n$ descendants de degré $n$ et de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.

Lorsque l'intervalle $[c,d]$ est un descendant de $[a,b]$, on suppose que l'on sait déterminer une fonction $M(c,d)$ telle que

$$\max_{c\le t\le d} f(t) \le M(c,d).$$

Si la fonction $f$ est de classe $C^1$, on peut prendre

$$M(c,d) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) + M_1\frac{d-c}{2}$$

où $M_1$ est un majorant de $|f'(t)|$ sur $[a,b]$. Si $f(t) = \pm x(t)$ et $[a,b]=[0,\pi]$, lorsque $[c,d]$ est un descendant de degré $n$ de $[a,b]$, on peut écrire $\frac{c+d}{2} = \frac{p\pi}{2^{n+1}}$ avec $p\in\mathbf{Z}$, et, par le lemme 3.19, $M(c,d) = x\left(\frac{c+d}{2}\right) + (n+1)\frac{d-c}{2} + \frac{1}{2^n}$ est un choix convenable.

Nous désignerons par $\widehat{m}$ une variable qui prendra des valeurs croissantes au cours de l'exécution, mais vérifiera toujours $\widehat{m} \le \max_{t\in\mathcal{D}} f(t)$. On initialise $\widehat{m}$ à $-\infty$. A chaque fois que l'on considère un intervalle $[c,d]$, si $\frac{c+d}{2}\in\mathcal{D}$ et si $f\left(\frac{c+d}{2}\right) > \widehat{m}$ on pose $\widehat{m} = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$.

Pour chaque valeur de $n = 0,1,2,\dots,N$, l'algorithme consiste à déterminer un majorant $m_n$ de $\max_{t\in\mathcal{D}} f(t)$ et un ensemble $\mathcal{E}_n = \{[c_1,d_1],[c_2,d_2],\dots,[c_\ell,d_\ell]\}$ d'intervalles descendants de $[a,b]$ de degré $n$ tels que

$$\max_{t\in\mathcal{D}} f(t) = \max_{t\in\bigcup_{i=1}^{\ell}[c_i,d_i]} f(t).$$

Au départ, on pose $m_0 = M(a,b)$ et $\mathcal{E}_0 = \{[a,b]\}$.

Supposons $m_n$ et $\mathcal{E}_n$ déterminés. Pour chacun des $2\ell$ intervalles $[c,d]$ qui sont enfants d'un élément de $\mathcal{E}_n$, on fait les opérations suivantes :

- si $\frac{c+d}{2}\in\mathcal{D}$, on pose $\widehat{m} = \max\left(\widehat{m}, f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)$ ;
- si $[c,d]\cap\mathcal{D} = \varnothing$ ou si $M(c,d) < \widehat{m}$, l'intervalle $[c,d]$ est éliminé ; sinon, il est placé dans $\mathcal{E}_{n+1}$.

On pose enfin

$$m_{n+1} = \max_{[c,d]\in\mathcal{E}_{n+1}} M(c,d)$$

et l'on a $\widehat{m} \le \max_{t\in\mathcal{D}} f(t) \le m_{n+1}$. On arrête l'algorithme lorsque la différence $m_{n+1} - \widehat{m}$ est suffisamment petite.

3.22. Nous donnons ci-dessous la courbe représentative de $x(t)$ (dessinée par MAPLE) sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ et (sur la page suivante) deux grossissements au voisinage de l'origine.

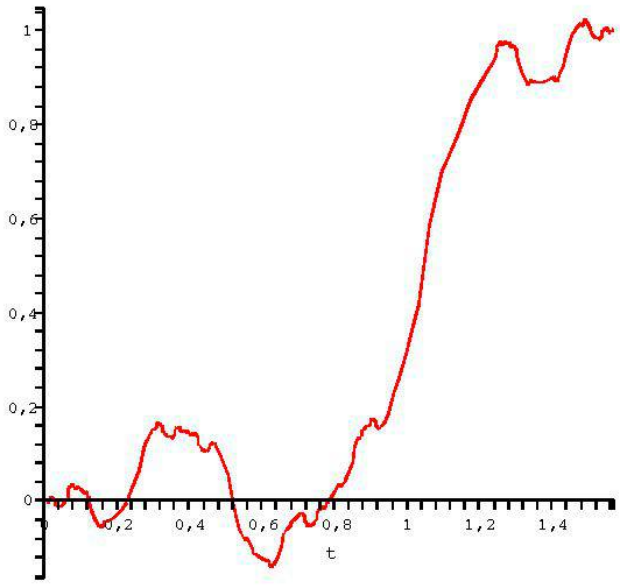


FIGURE 5
$x(t), \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

3.23. PROPOSITION. (i) *Soit* $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. *Alors* $x(t/4^n)/(t/4^n)$ *a une limite finie* $\varphi(t)$ *quand l'entier* $n$ *tend vers* $+\infty$. *La fonction* $\varphi$ *n'est dérivable en aucun point.*

(ii) $\varphi(2t) = -\varphi(t)$, $\varphi(4t) = \varphi(t)$.

(iii) *Quand* $t \to 0$, $x(t) = t\varphi(t) + O(t^2)$.

On trouvera ci-dessous (figure 8) la courbe représentative de $\varphi(t)$ sur l'intervalle $[\pi/10, 2\pi/5]$, dessinée par le système de calcul formel MAPLE [4].

Prouvons (i). En partant de la définition de $x(t)$, on voit que $x(t) + \frac{1}{2}x(2t) = \sin^2 t$ ; il en résulte

$$\frac{x(t/2^n)}{t/2^n} + \frac{x(t/2^{n-1})}{t/2^{n-1}} = \frac{\sin^2(t/2^n)}{t/2^n} \tag{3.6}$$

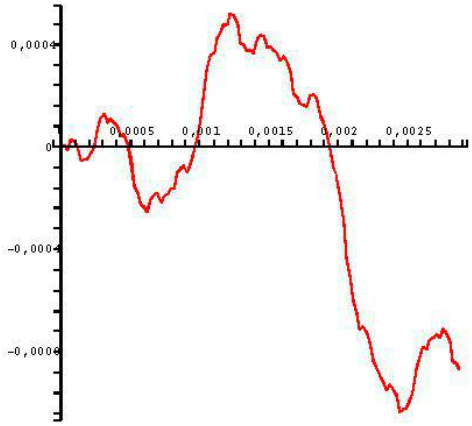


FIGURE 6
$x\left(\frac{m\pi}{2^{17}}\right)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 120$

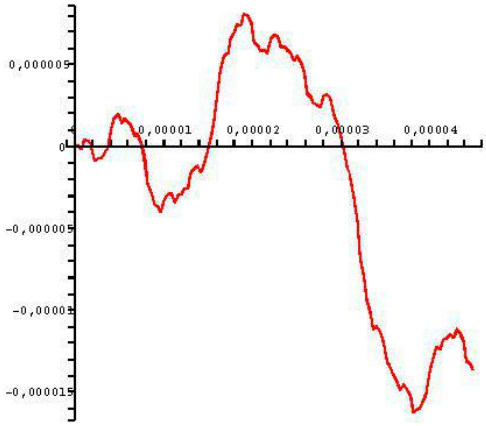


FIGURE 7
$x\left(\frac{m\pi}{2^{23}}\right)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 120$

d'où, par changements de signe et addition,

$$\frac{x(t)}{t} = \frac{\sin^2(t/2)}{t/2} - \frac{\sin^2(t/4)}{t/4} + \frac{\sin^2(t/8)}{t/8} - \ldots - \frac{\sin^2(t/4^n)}{t/4^n} + \frac{x(t/4^n)}{t/4^n}. \tag{3.7}$$

Posons

$$g(t) = 2\sin^2\frac{t}{2} - 4\sin^2\frac{t}{4} + 8\sin^2\frac{t}{8} - \ldots \tag{3.8}$$

La série $g(t)$ est absolument convergente et (3.7) entraîne

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{x(t/4^n)}{t/4^n} = \frac{1}{t}(x(t) - g(t)). \tag{3.9}$$

Or $g(t)$ est la primitive nulle en 0 de la fonction continue

$$g'(t) = \sin t - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{4} - \ldots$$

Comme $x(t)$ est non-dérivable partout sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, il en est de même pour $\varphi(t)$.

D'après (3.6), on a

$$\left|\frac{x(t/2^n)}{t/2^n} + \frac{x(t/2^{n-1})}{t/2^{n-1}}\right| = \left|\frac{\sin^2(t/2^n)}{t/2^n}\right| \le \frac{|t|}{2^n}.$$

Remplaçons $t$ par $t/2^n$ :

$$\left|\frac{x(t/4^n)}{t/4^n} + \frac{x(2t/4^n)}{2t/4^n}\right| \le \frac{|t|}{4^n}.$$

Quand $n \to \infty$, on obtient $\varphi(t) + \varphi(2t) = 0$, d'où (ii).

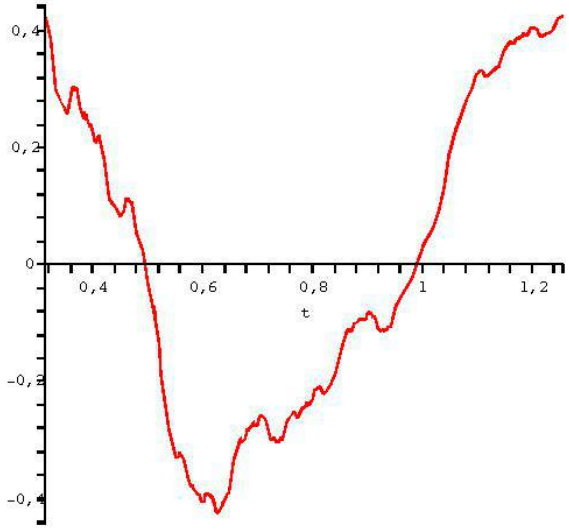


FIGURE 8

$\varphi(t),\ \dfrac{\pi}{10} \leq t \leq \dfrac{2\pi}{5}$

A partir de la définition (3.8) de $g(t)$, il vient

$$|g(t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n \sin^2 \frac{t}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin^2 \frac{t}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^2}{2^n} = t^2$$

et (iii) découle de (3.9).

3.24. La fonction $x(t)$ a des propriétés d'autosimilarité au voisinage d'autres points que $t = 0$. Donnons seulement un exemple.

PROPOSITION. (i) *Soit* $h \in \mathbf{R}, h \neq 0$. *Alors*

$$u_n = \frac{x\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16^n}\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{h}{16^n}}$$

*a une limite finie* $\psi(h)$ *quand* $n \to \infty$. *La fonction* $\psi$ *n'est dérivable en aucun point.*

(ii) $\psi(16h) = \psi(h)$.

(iii) *Quand* $h \to 0$, $x\left(\frac{\pi}{5} + h\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right) = h\psi(h) + O(h^2)$.

On peut voir ci-dessous les courbes représentatives de $\psi(h)$ sur l'intervalle $[\pi/16, \pi]$ (cf. figure 9) et de $-\psi(h)$ sur l'intervalle $[-\pi, -\pi/16]$ (cf. figure 10), dessinées par MAPLE [4].

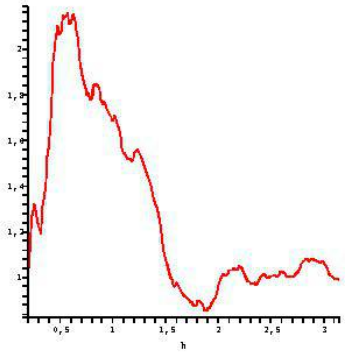

FIGURE 9
$\psi(h),\ \frac{\pi}{16} \leq h \leq \pi$

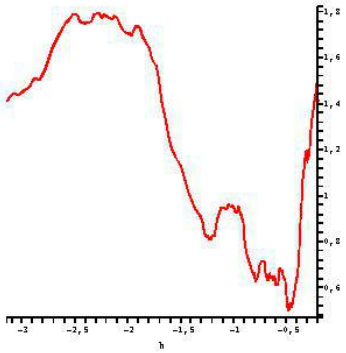

FIGURE 10
$-\psi(h),\ -\pi \leq h \leq -\frac{\pi}{16}$

Comme en 3.10, introduisons la fonction

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t \\ &= \frac{5}{16} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \frac{1}{16}\cos 16t\,. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16}\right) &= f\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16}\right) + \frac{1}{16}x\left(16\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16}\right) + \frac{1}{16}x\left(\frac{\pi}{5} + h\right). \end{aligned}$$

En particulier,

$$x\left(\frac{\pi}{5}\right) = f\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{16}x\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

et, par différence,

$$\begin{aligned} (3.10)\quad & \frac{x(\pi/5 + h/16) - x(\pi/5)}{h/16} \\ &= \frac{f(\pi/5 + h/16) - f(\pi/5)}{h/16} + \frac{1}{16}\frac{x(\pi/5 + h) - x(\pi/5)}{h/16}\,. \end{aligned}$$

Posons $v_n = \dfrac{f(\pi/5 + h/16^n) - f(\pi/5)}{h/16^n}$. En remplaçant $h$ dans l'équation (3.10) par $h/16^{n-1}$, on obtient $u_n = v_n + u_{n-1}$, ce qui entraîne par addition

$$u_n = u_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i\,.$$

Comme $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$ (cf. 3.10) et que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$|f''(t)| = |2\cos 2t - 4\cos 4t + 8\cos 8t - 16\cos 16t| \leq 30\,,$$

la formule de Taylor donne $|f(\pi/5 + t) - f(\pi/5)| \leq 15t^2$. Il s'ensuit que $|v_n| \leq \frac{15|h|}{16^n}$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ est convergente. On a donc $\lim u_n = \psi(h)$ avec

$$\psi(h) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{x\left(\frac{\pi}{5} + h\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16^n}\right) - f\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{h}{16^n}}\,.$$

Posons $G(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h}{16^n}\right) - f\left(\frac{\pi}{5}\right)}{h/16^n}$. Comme $f$ est analytique et que l'on a $f^{(m)}\left(\frac{\pi}{5}\right) = O(16^m)$, il vient

$$\begin{aligned} G(h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n}{h} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{f^{(m)}\left(\frac{\pi}{5}\right)}{m!} \frac{h^m}{16^{mn}} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{f^{(m)}\left(\frac{\pi}{5}\right) h^{m-1}}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^{n(m-1)}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{f^{(m)}\left(\frac{\pi}{5}\right) h^{m-1}}{m!(16^{m-1} - 1)}\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que $G(h)$ est analytique et, comme pour la fonction $\varphi$ de la proposition 3.23, la non-dérivabilité de $x\left(\frac{\pi}{5} + h\right)$ entraîne la non-dérivabilité de $\psi(h)$ pour $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, ce qui prouve (i).

On a

$$\frac{x\left(\frac{\pi}{5} + \frac{h/16}{16^n}\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{h/16}{16^n}} \to \psi\left(\frac{h}{16}\right)$$

donc $\psi\left(\frac{h}{16}\right) = \psi(h)$, ce qui prouve (ii).

La preuve de (iii) est analogue à celle de 3.23 (iii).

3.25. La méthode ne s'applique pas au voisinage de $t = \frac{\pi}{3}$ (rappelons que, d'après 3.9, $x(t)$ a pour dérivée $+\infty$ en $\frac{\pi}{3}$). Toutefois, on a un résultat concernant les différences secondes :

PROPOSITION. *Soit* $h \in \mathbf{R}, h \neq 0$. *Lorsque* $n \to \infty$, *le rapport*

$$\frac{x\left(\frac{\pi}{3}+\frac{h}{4^n}\right)+x\left(\frac{\pi}{3}-\frac{h}{4^n}\right)-2x\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{h}{4^n}}$$

*tend vers* $-\varphi(h)$, *où* $\varphi$ *est la fonction de la proposition* 3.23.

On a $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 8t + \dots$ D'autre part, $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$, donc, pour $n \geq 1$,

$$\left\{2^n\frac{\pi}{3}, -2^n\frac{\pi}{3}\right\} = \left\{2^{n-1}\frac{2\pi}{3}, -2^{n-1}\frac{2\pi}{3}\right\} \equiv \left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\} \pmod{2\pi}$$

$$\exp\left(2^n it\right) + \exp\left(2^n i\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right) + \exp\left(2^n i\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

$$\cos\left(2^n t\right) + \cos\left(2^n\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(2^n\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

$$x(t) + x\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + x\left(t-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1.$$

Comme $x$ est paire et que $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit

$$x\left(\frac{\pi}{3}+\frac{h}{4^n}\right)+x\left(\frac{\pi}{3}-\frac{h}{4^n}\right)-2x\left(\frac{\pi}{3}\right) = -x\left(\frac{h}{4^n}\right).$$

L'application de la proposition 3.23 termine alors la démonstration.

3.26. LEMME. *Soit* $P_1(t) = \sin^2 t(1-2\cos^2 t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t$.

(i) *La fonction* $t \mapsto \frac{P_1(t)}{t}$ *est décroissante pour* $0 \leq t \leq 0.411$.

(ii) *On a* $\frac{d}{dt}\left(\frac{P_1(t)}{t}\right) \geq -1$ *pour* $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Posons $f_1(t) = \frac{P_1(t)}{t}$. On a $P_1'(t) = \sin 2t - \sin 4t$, $f_1{}'(t) = \frac{f_2(t)}{t^2}$ avec $f_2(t) = tP_1'(t) - P_1(t)$ et

$$f_2{}'(t) = tP_1''(t) = t(2\cos 2t - 4\cos 4t) = t(-2\xi^2+\xi+4)$$

en posant $\xi = 2\cos 2t$. Le trinôme ci-dessus s'annule pour $\xi = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$ et l'on a les variations:

| $t$ | $0$ | | $0.28391$ | | $0.41125$ | | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $2$ | $\searrow$ | $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $0$ |
| $f_2'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $\pi$ |
| $f_2(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-0.0386$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{4}$ |

ce qui prouve le point (i).

Posons $f_3(t) = f_2(t) + t^2 = t^2(f_1'(t) + 1)$. On a

$$f_3'(t) = f_2'(t) + 2t = t(P_1'(t) + 2) = -t(\xi - 2)(2\xi + 3) \geq 0$$

pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ et comme $f_3(0) = 0$, on a $f_3(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, ce qui prouve le point (ii).

3.27. La proposition suivante améliore la proposition 3.16, mais la preuve est plus difficile:

PROPOSITION. *Soit $t$ vérifiant $\frac{\pi}{5} \leq t \leq \frac{3\pi}{5}$. On a*

$$x(t) - x\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0.77\left(t - \frac{\pi}{5}\right).$$

Dans un premier temps, on recherche, à l'aide de l'algorithme 3.21, le minimum de la fonction $f_1(t) = x(t) - x\left(\frac{\pi}{5}\right) - 0.77\left(t - \frac{\pi}{5}\right)$ sur l'intervalle $\left[\frac{9\pi}{40}, \frac{3\pi}{5}\right]$. Par le lemme 3.19, lorsque $c$ et $d$ vérifient $c < d$ et $\frac{c+d}{2} = \frac{p\pi}{2^n}$ (avec $p \in \mathbf{Z}$), on a

$$M(c,d) = f_1\left(\frac{c+d}{2}\right) + (n + 0.77)\frac{d-c}{2} + \frac{1}{2^{n-1}} \geq \max_{c \leq t \leq d} f_1(t).$$

En choisissant $n = 20$, l'exécution de cet algorithme montre que le minimum de $f_1(t)$ sur l'intervalle $\left[\frac{9\pi}{40}, \frac{3\pi}{5}\right]$ est compris entre $f_1(t_1) - \frac{20.77\,\pi + 2}{2^{20}} = 0.00070626\ldots$ et $f_1(t_1) = 0.00077040\ldots$, avec $t_1 = \frac{249037}{2^{20}}\pi$ ; il est donc positif et la proposition est vraie pour $\frac{9\pi}{40} \leq t \leq \frac{3\pi}{5}$.

Soit maintenant $t$ compris entre $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{40}$. On pose $h = t - \frac{\pi}{5}$ et on détermine $n \geq 1$ tel que

$$\frac{\pi}{40} = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{5} \leq 16^n h < \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

On pose, comme en 3.10, $f(t) = \sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + \frac{1}{4}\sin^2 4t - \frac{1}{8}\sin^2 8t$ ; $f(t)$ et $x(t)$ sont des fonctions périodiques de période $\pi$ ; de plus, $f(t)$ est minimale en $\frac{\pi}{5}$ (cf. 3.10). En notant que $16^j\frac{\pi}{5} \equiv \frac{\pi}{5} \pmod{\pi}$, il vient

$$\begin{aligned}
x(t) &= f(t) + \frac{1}{16}f(16\,t) + \ldots + \frac{1}{16^{n-1}}f(16^{n-1}\,t) + \frac{1}{16^n}x(16^n\,t) \\
&= f\left(\frac{\pi}{5} + h\right) + \ldots + \frac{1}{16^{n-1}}f\left(\frac{\pi}{5} + 16^{n-1}h\right) + \frac{1}{16^n}x\left(\frac{\pi}{5} + 16^n h\right) \\
&\geq f\left(\frac{\pi}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{16^{n-1}}f\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{16^n}\left(x\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.77 \cdot 16^n h\right) \\
&= x\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.77\,h
\end{aligned}$$

car, par définition de $n$, $\frac{\pi}{5} + 16^n h \in \left[\frac{9\pi}{40}, \frac{3\pi}{5}\right]$.

3.28. La proposition suivante améliore la proposition 3.13, mais la preuve est plus difficile :

PROPOSITION. *Soit $t$ vérifiant $\frac{3\pi}{20} \leq t \leq \frac{\pi}{5}$. On a*

$$x(t) - x\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0.465\left(\frac{\pi}{5} - t\right).$$

La démonstration est très voisine de celle de la proposition 3.27. A l'aide de l'algorithme 3.21, on montre que le minimum de la fonction $f_2(t) = x(t) - x\left(\frac{\pi}{5}\right) - 0.465\left(\frac{\pi}{5} - t\right)$ sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{20}, \frac{63\pi}{320}\right]$ est compris entre $f_2(t_2) - \frac{20.465\,\pi + 2}{2^{20}} = 0.00005945\ldots$ et $f_2(t_2) = 0.00012267\ldots$ (avec $t_2 = \frac{199885}{2^{20}}\pi$) et donc est positif. Puis, pour $\frac{63\pi}{320} \leq t \leq \frac{\pi}{5}$, on applique le même raisonnement qu'en 3.27.

3.29. LEMME. *Soit $t_n = \frac{\pi}{5 \cdot 4^n}$. Pour $n \geq 0$ et $\frac{3}{4}t_n \leq t \leq t_n$, on a*

$$\frac{x(t)}{t} \geq \frac{x(t_n)}{t_n}.$$

Pour $n = 0$ et $\frac{3}{4}t_0 = \frac{3\pi}{20} \leq t \leq t_0 = \frac{\pi}{5}$, on pose $t = \frac{\pi}{5} - h$, et l'on a en utilisant la valeur $x\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{3\sqrt{5} - 5}{12} = -0.14235\ldots$ calculée en 3.3,

$$t\frac{x(t_0)}{t_0} = x\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{5h}{\pi}x\left(\frac{\pi}{5}\right) = x\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{5\cdot 0.14235\ldots}{\pi}\,h$$
$$= x\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.22655\ldots\,h \leq x(t)$$

par la proposition 3.28.

Puis, par récurrence, supposons $n \geq 1$ et le lemme vrai pour $n-1$. On écrit $t = t_n - h$, $0 \leq h \leq \frac{t_n}{4}$. On a $4t = t_{n-1} - 4h \in \left[\frac{3}{4}t_{n-1}, t_{n-1}\right]$ et, en posant $P_1(t) = \sin^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2t$ comme en 3.26, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)}{t} &= \frac{P_1(t)}{t} + \frac{x(4t)}{4t} \\
&\geq \frac{P_1(t)}{t} + \frac{x(4t_n)}{4t_n}, && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&\geq \frac{P_1(t_n)}{t_n} + \frac{x(4t_n)}{4t_n}, && \text{par le lemme 3.26 (i) car } t_n \leq t_1 < 0.16 \\
&= \frac{x(t_n)}{t_n}.
\end{aligned}$$

3.30. LEMME. *Soit, comme en* 3.29, $t_n = \dfrac{\pi}{5\cdot 4^n}$. *Pour* $n \geq 0$ *et* $t_n \leq t = t_n + h \leq 3t_n$, *on a*

$$\frac{x(t)}{t} \geq \frac{x(t_n)}{t_n} + \frac{1}{3}(t - t_n) = \frac{x(t_n)}{t_n} + \frac{h}{3} \geq \frac{x(t_n)}{t_n}.$$

Raisonnons par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, on a $t = t_0 + h = \frac{\pi}{5} + h$, $0 \leq h \leq \frac{2\pi}{5}$ et

$$\begin{aligned}
t\left(\frac{x(t_0)}{t_0} + \frac{t - t_0}{3}\right) &= x(t_0) + h\,\frac{x(t_0)}{t_0} + \frac{1}{3}\,h(t_0 + h) \\
&\leq x(t_0) - 0.22655\ldots h + \frac{1}{3}\frac{3\pi}{5}h \\
&= x\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.4017\ldots\,h \leq x(t)
\end{aligned}$$

par la proposition 3.27.

Supposons le lemme vrai pour $n-1$ et $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)}{t} &= \frac{P_1(t)}{t} + \frac{x(4t)}{4t} \\
&\geq \frac{P_1(t_n)}{t_n} - h + \frac{x(4t)}{4t}, && \text{par le lemme 3.26 (ii) car } t_n \leq t \leq 3t_1 < \frac{\pi}{4} \\
&\geq \frac{P_1(t_n)}{t_n} - h + \frac{x(4t_n)}{4t_n} + \frac{4}{3}\,h, && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{x(t_n)}{t_n} + \frac{1}{3}\,h.
\end{aligned}$$

3.31. PROPOSITION. *Soit $S$ la somme de la série convergente*

$$S = \frac{5}{\pi}\, x\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{5}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-2)^j \sin^2 \frac{\pi}{5 \cdot 2^j}$$
$$= \frac{5}{\pi}\left(-\frac{3\sqrt{5}-5}{12} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2i-1}\left(\sin^2 \frac{2\pi}{5\cdot 4^i} - 2\sin^2 \frac{\pi}{5\cdot 4^i}\right)\right)$$

*et, comme en* 3.29 *et* 3.30, $t_n = \dfrac{\pi}{5\cdot 4^n}$. *On a*

$$-\limsup_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} = \liminf_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n)}{t_n} = S = -0.4269\ldots$$

Pour tout $n \geq 1$, posons $P_{2n-1}(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^k}{2^k} \sin^2\left(2^k t\right)$. On a

$$x(t_n) = P_{2n-1}(t_n) + \frac{1}{4^n} x\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

d'où

$$\frac{x(t_n)}{t_n} - \frac{5}{\pi} x\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{P_{2n-1}(t_n)}{t_n} = \frac{5\cdot 4^n}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2^k} \sin^2 \frac{2^k \pi}{5\cdot 4^n}$$
$$= \frac{5\cdot 4^n}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{2n-j}}{2^{2n-j}} \sin^2 \frac{2^{2n-j}\pi}{5\cdot 4^n}$$
$$= \frac{5}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} (-2)^j \sin^2 \frac{\pi}{5\cdot 2^j}$$
$$= -\frac{5}{\pi} \sum_{i=1}^{n} 2^{2i-1}\left(\sin^2 \frac{2\pi}{5\cdot 4^i} - 2\sin^2 \frac{\pi}{5\cdot 4^i}\right).$$

Notons que $\sin^2 2t - 2\sin^2 t = 2\sin^2 t(2\cos^2 t - 1)$ est positif pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. La suite $\dfrac{x(t_n)}{t_n}$ est donc décroissante et l'on a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{x(t_n)}{t_n} \geq S \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n)}{t_n} = S. \tag{3.11}$$

Soit maintenant $t$ vérifiant $0 < t \leq \frac{\pi}{20}$. On définit $n$ par $t_n \leq t < t_{n-1}$. Par les lemmes 3.29 et 3.30 et par (3.11), il vient

$$\frac{x(t)}{t} \geq \min\left(\frac{x(t_n)}{t_n}, \frac{x(t_{n-1})}{t_{n-1}}\right) = \frac{x(t_n)}{t_n} \geq S$$

donc $\liminf_{t\to 0,\, t>0} \frac{x(t)}{t} \geq S$ et comme $\lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n)}{t_n} = S$, on obtient $\liminf_{t\to 0,\, t>0} \frac{x(t)}{t} = S$. La proposition s'en déduit, car la fonction $x$ est paire et, par le lemme 3.5, $\limsup_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} = -\liminf_{t\to 0} \frac{x(t)}{t}$.

3.32. REMARQUES. Les nombres $t_1$ et $t_2$ cités en 3.27 et 3.28 vérifient

$$\frac{t_1}{\pi} = \frac{249037}{2^{20}} = 0.23750019\ldots \approx \frac{19}{80} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5\cdot 16}$$

et

$$\frac{t_2}{\pi} = \frac{199885}{2^{20}} = 0.19062519\ldots \approx \frac{61}{320} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20\cdot 16}.$$

Posons

$$\ell^+ = \liminf_{t\to\frac{\pi}{5},\, t>\frac{\pi}{5}} \frac{x(t)-x(\pi/5)}{t-\pi/5} \quad \text{et} \quad \ell^- = \liminf_{t\to\frac{\pi}{5},\, t<\frac{\pi}{5}} \frac{x(t)-x(\pi/5)}{\pi/5-t}.$$

Il est possible que l'on ait

$$\ell^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{x\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{5\cdot 16^n}\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)}{3\pi/(5\cdot 16^n)} \quad \text{et} \quad \ell^- = \lim_{n\to\infty} \frac{x\left(\frac{\pi}{5}-\frac{3\pi}{20\cdot 16^n}\right) - x\left(\frac{\pi}{5}\right)}{3\pi/(20\cdot 16^n)},$$

ce qui est étayé par les courbes des figures 9 et 10 où les minima semblent atteints en $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{20}$. Naturellement, une relation existe entre $\ell^+$ et $\ell^-$ par la formule $x(t) = P_1(t) + x(4t)$.

Par ailleurs, la proposition 3.31 donne le maximum de la fonction $\varphi(t)$ de 3.23, et les points $t$ où ses extrémaux sont atteints (cf. figure 8).

## 4. PROPRIÉTÉS GLOBALES DE $L(T)$

4.1. Dans cette partie, nous étudions la fonction $|L(\alpha,\beta)|$.

4.2. LEMME. *Soit $N$ un entier positif et $h, k, \alpha, \beta$ quatre nombres réels tels que $0 \leq |h|, |k| \leq \frac{\pi}{2^N}$, $\alpha = \frac{p\pi}{2^N}$ et $\beta = \frac{q\pi}{2^N}$ avec $p, q \in \mathbf{Z}$. Alors la fonction $L$ définie en 1.8 vérifie*

$$|L(\alpha+h, \beta+k) - L(\alpha,\beta)| \leq \frac{2N\pi+6}{2^N}.$$

Posons $\Delta(n,\alpha,h) = e^{(-2)^n i(\alpha+h)} - e^{(-2)^n i\alpha}$. On a, comme en 2.4,

$$|\Delta(n,\alpha,h)| = \left|e^{(-2)^n i\alpha}\left(e^{(-2)^n ih} - 1\right)\right| \leq \max(2^n|h|, 2)$$

et

$$\begin{aligned}
&|L(\alpha+h,\beta+k)-L(\alpha,\beta)| \\
&\qquad = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left(\Delta(n,\alpha,h)+\Delta(n,\beta,k)+\Delta(n,-\alpha-\beta,-h-k)\right)\right| \\
&\qquad \le \sum_{n=0}^{N-1}\frac{|h|+|k|+|h+k|}{2}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{6}{2^{n+1}} \le N\frac{\pi}{2^{N-1}}+\frac{6}{2^N}\,.
\end{aligned}$$

4.3. Désignons par $Q(a,b;r)$ le carré fermé de $\mathbf{R}^2$ de centre $(a,b)$, de demi-côté $r$ et de sommets $(a\pm r, b\pm r)$ et par $\mathcal{D}$ un fermé de $Q(a,b;r)$. L'algorithme 3.21 peut s'étendre pour calculer le maximum d'une fonction réelle $f$ définie sur $\mathcal{D}$.

Le carré $Q(a,b;r)$ a quatre enfants: $Q(a\pm r/2, b\pm r/2; r/2)$, 16 petits-enfants, etc., $4^n$ descendants de degré $n$ et de demi-côté $\dfrac{r}{2^n}$.

Lorsque $Q(c,d;\rho)$ est un descendant de $Q(a,b;r)$, il faut connaître une fonction $M(c,d;\rho)$ telle que

$$\max_{(t_1,t_2)\in Q(c,d;\rho)} f(t_1,t_2) \le M(c,d;\rho)\,.$$

Lorsque $f=\pm|L|$ et $Q(a,b;r)=Q(\pi,\pi;\pi)=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, un descendant de degré $n$ de $Q(a,b;r)$ est de la forme $Q\left(\dfrac{p\pi}{2^n},\dfrac{q\pi}{2^n};\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ (avec $p,q\in\mathbf{N}$). Par le lemme 4.2, on peut prendre

$$M\left(\frac{p\pi}{2^n},\frac{q\pi}{2^n};\frac{\pi}{2^n}\right)=f\left(\frac{p\pi}{2^n},\frac{q\pi}{2^n}\right)+\frac{2n\pi+6}{2^n}\,. \tag{4.1}$$

Soit $g$ une fonction de classe $C^1$ de $Q(a,b;r)$ dans $\mathbf{C}$ et deux constantes $M_1$ et $M_2$ telles que pour $(t_1,t_2)\in Q(a,b;r)$ on ait

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t_1}(t_1,t_2)\right|\le M_1\,,\qquad \left|\frac{\partial g}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right|\le M_2\,.$$

Alors, pour $f=\pm|g|$, on peut prendre

$$M(c,d;r)=f(c,d)+(M_1+M_2)r\,. \tag{4.2}$$

Une fois la fonction $M$ connue, l'algorithme fonctionne comme en 3.21 en remplaçant "intervalle" par "carré".

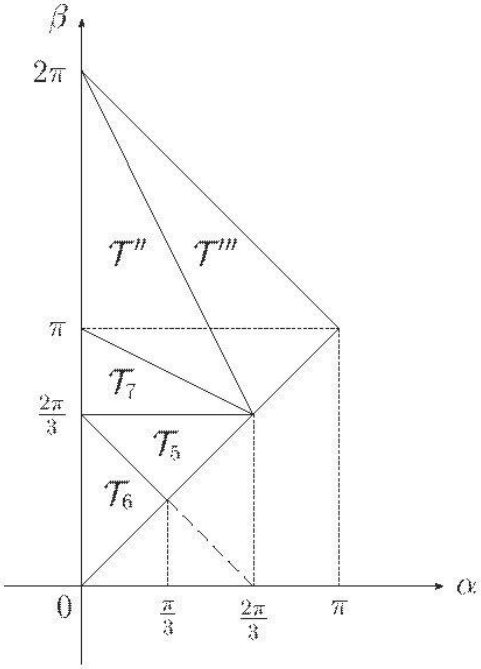


FIGURE 11
Partition du triangle $\mathcal{T}_1$ de la figure 2

4.4. LEMME. *Soit $\mathcal{T}_5$ le triangle du plan $\alpha, \beta$ défini par*

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{2\pi}{3} \leq \alpha + \beta . \tag{4.3}$$

*Soit $T$ un triangle dont le rayon du cercle circonscrit est égal à 1. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$ tel que le triangle $(A, B, C)$ ($A = e^{i\alpha}$, $B = e^{i\beta}$, $C = e^{i(2\pi-\alpha-\beta)}$) soit égal au triangle $T$.*

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$ et $\gamma = 2\pi - \alpha - \beta$. On a $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$. Dans le triangle $(A, B, C)$ (cf. figure 1), on a

$$2\widehat{C} = \beta - \alpha, \quad 2\widehat{A} = \gamma - \beta, \quad 2\widehat{B} = \alpha + (2\pi - \gamma) = 2\alpha + \beta . \tag{4.4}$$

Appelons $A_T, B_T, C_T$ les sommets du triangle $T$ de façon que ses trois angles vérifient

$$0 \leq \widehat{C}_T \leq \widehat{A}_T \leq \widehat{B}_T \leq \pi . \tag{4.5}$$

Posons $\alpha = \frac{2}{3}(\widehat{B}_T - \widehat{C}_T)$ et $\beta = \frac{2}{3}(2\widehat{C}_T + \widehat{B}_T)$; la relation (4.5) implique (4.3), c'est-à-dire $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$ et, par (4.4), les angles du triangle $(A, B, C)$ sont égaux à ceux du triangle $T = (\widehat{A}_T, \widehat{B}_T, \widehat{C}_T)$. Ces deux triangles sont donc semblables et, comme ils ont même rayon de cercle circonscrit, ils sont égaux.

4.5. LEMME. *Soit $ah^2 + bhk + ck^2$ une forme quadratique à coefficients réels et trois nombres $a'$, $b'$, $c'$ vérifiant $a' \leq a$, $|b'| \geq |b|$, $c' \leq c$. Alors, si la forme quadratique $a'h^2 + b'hk + c'k^2$ est définie positive, la forme initiale l'est aussi et*

$$ah^2 + bhk + ck^2 \geq \frac{4a'c' - b'^2}{4\max(a', c')}(\max(|h|, |k|))^2 .$$

Les hypothèses entraînent $b^2 - 4ac \leq b'^2 - 4a'c' < 0$. Il vient ensuite

$$\begin{aligned} ah^2 + bhk + ck^2 &\geq a'h^2 - |b'hk| + c'k^2 \\ &= a'\left(|h| - \frac{|b'|}{2a'}|k|\right)^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'}k^2 \\ &\geq \frac{4a'c' - b'^2}{4a'}k^2 \geq \frac{4a'c' - b'^2}{4\max(a', c')}k^2 . \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient de même $ah^2 + bhk + ck^2 \geq \dfrac{4a'c' - b'^2}{4\max(a', c')}h^2$, d'où le lemme.

4.6. LEMME. *Posons*

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left(e^{(-2)^n i\alpha} + e^{(-2)^n i\beta} + e^{(-2)^n i(-\alpha-\beta)}\right) . \tag{4.6}$$

*Soit deux nombres réels $h$ et $k$ vérifiant $|h|, |k| \leq \frac{1}{200}$ et $(h, k) \neq (0, 0)$. Alors on a*

$$\left|\Phi\left(\frac{2\pi}{7} + h, \frac{4\pi}{7} + k\right)\right| < \left|\Phi\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)\right| = \frac{21}{16} .$$

Les calculs sont un peu techniques; ils ont été faits à la main et contrôlés par MAPLE. Nous ne donnons que les résultats principaux. Nous exprimerons les résultats en fonction de

$$z = \exp\left(\frac{i\pi}{7}\right) .$$

Rappelons que $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ et notons que la fonction $\Phi(\alpha, \beta)$ est périodique de période $2\pi$ en $\alpha$ et $\beta$.

On calcule successivement

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad S = \Phi\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) &= \frac{21}{64}(1 - 3z + 3z^2 + 3z^4), \quad |S| = \frac{21}{16}, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) &= \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) = 0, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) &= 15z^5 - 30z^4 + 3z^3 - \frac{57}{2}z^2 + \frac{45}{2}z - 20, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) &= 3z^5 - 6z^4 - 12z^3 - 12z^2 + \frac{9}{2}z - 4, \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) &= -12z^5 - \frac{15}{2}z^4 - 15z^3 - 15z^2 + \frac{27}{2}z - 5.
\end{aligned}
$$

Quels que soient $h$ et $k$, posons

$$
H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)h^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)hk + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)k^2\right).
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{S} &= \left(\frac{16}{7}z^5 - \frac{4}{7}z^4 + \frac{41}{7}z^3 + \frac{6}{7}z^2 + \frac{17}{7}z - \frac{253}{21}\right)h^2 \\
&\quad + \left(\frac{82}{7}z^5 - \frac{52}{7}z^4 + \frac{50}{7}z^3 - \frac{6}{7}z^2 + \frac{32}{7}z - \frac{328}{21}\right)hk \\
&\quad + \left(\frac{25}{7}z^5 - \frac{1}{7}z^4 - \frac{16}{7}z^3 + \frac{12}{7}z^2 - \frac{22}{7}z - \frac{205}{21}\right)k^2 \\
&= -(9.31\ldots h^2 + 16.09\ldots hk + 14.22\ldots k^2) \\
&\quad + i(8.66\ldots h^2 + 10.19\ldots hk + 0.40\ldots k^2).
\end{aligned}
$$

On doit ensuite majorer les modules des dérivées troisièmes. Il vient

$$
\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{5} 2^{2n-1} i^3 \left(e^{(-2)^n i\alpha} - e^{(-2)^n i(-\alpha-\beta)}\right)
$$

d'où

$$
\left|\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}(\alpha, \beta)\right| \leq 2\sum_{n=0}^{5} 2^{2n-1} = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1365.
$$

On trouve de même

$$
\left|\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}\right| \leq \frac{1365}{2}, \quad \left|\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right| \leq \frac{1365}{2}, \quad \left|\frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta^3}\right| \leq 1365.
$$

Il est commode de poser $\lambda = \max(|h|, |k|)$. Par la formule de Taylor, pour

tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $\alpha = \frac{2\pi}{7} + h$, $\beta = \frac{4\pi}{7} + k$, on a

$$\Phi(\alpha, \beta) = S + H + R$$

avec

$$|R| \leq \frac{1365}{6}\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1\right)\lambda^3 = \frac{2275}{2}\lambda^3 \tag{4.8}$$

et

$$|\Phi(\alpha, \beta)| \leq |S|\left|1 + \frac{H}{S} + \frac{R}{S}\right| \leq |S|\left(\left|1 + \frac{H}{S}\right| + \left|\frac{R}{S}\right|\right). \tag{4.9}$$

Maintenant, on applique le lemme 4.5 à la forme quadratique $-\Re\left(\frac{H}{S}\right)$ en choisissant $a' = 9.3$, $b' = 16.2$ et $c' = 14.2$. Il vient

$$-\Re\left(\frac{H}{S}\right) \geq \frac{9.3 \times 14.2 - (8.1)^2}{14.2}\lambda^2 \geq \frac{9}{2}\lambda^2 .$$

On a aussi

$$\left|\Re\left(\frac{H}{S}\right)\right| \leq (9.4 + 16.1 + 14.3)\lambda^2 \leq 40\,\lambda^2,$$
$$\left|\Im\left(\frac{H}{S}\right)\right| \leq (8.7 + 10.2 + 0.5)\lambda^2 \leq 20\,\lambda^2$$

d'où

$$\left|\frac{H}{S}\right|^2 \leq (40^2 + 20^2)\lambda^4 = 2000\,\lambda^4 .$$

On en déduit

$$\left|1 + \frac{H}{S}\right|^2 = 1 + 2\Re\left(\frac{H}{S}\right) + \left|\frac{H}{S}\right|^2 \leq 1 - 9\lambda^2 + 2000\,\lambda^4$$

et, en utilisant l'inégalité $\sqrt{1+t} \leq 1 + t/2$ valable pour tout $t \geq -1$, on obtient

$$\left|1 + \frac{H}{S}\right| \leq 1 - \frac{9}{2}\lambda^2 + 1000\,\lambda^4 .$$

En tenant compte de (4.9), (4.8) et (4.7), on a

$$|\Phi(\alpha, \beta)| \leq \frac{21}{16}\left(1 - \frac{9}{2}\lambda^2 + 1000\,\lambda^4 + \frac{2600}{3}\lambda^3\right)$$

et la parenthèse est inférieure à 1 pour $0 < \lambda < \frac{\sqrt{17305} - 130}{300} = 0.00516\ldots$

4.7. LEMME. *Soit* $\Phi$ *défini par* (4.6)*; quels que soient* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, *on a* $|\Phi(\alpha,\beta)| \leq \frac{21}{16}$. *De plus, si* $(\alpha,\beta) \neq \left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$ *et* $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}_5$ *(cf.* 4.4*), on a* $|\Phi(\alpha,\beta)| < \frac{21}{16}$.

Avec les notations de 4.4, posons

$$\mathcal{D} = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}_5 \; ; \; \max\left(\left|\alpha - \frac{2\pi}{7}\right|, \left|\beta - \frac{4\pi}{7}\right|\right) \geq \frac{\pi}{630}\right\}.$$

A partir du lemme 4.6, il nous suffit de montrer que

$$M_{\mathcal{D}} = \max_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} |\Phi(\alpha,\beta)| < \frac{21}{16} = 1.3125.$$

Cela se vérifie à partir de l'algorithme 4.3 : on majore $M(c,d;r)$ par (4.2) avec $M_1 = M_2 = 6$ et l'on obtient pour $n = 20$,

$$\begin{aligned} 1.3123534\ldots = \left|\Phi\left(\frac{150629}{2^{19}}\pi, \frac{299119}{2^{19}}\pi\right)\right| &\leq M_{\mathcal{D}} \\ &\leq \left|\Phi\left(\frac{301257}{2^{20}}\pi, \frac{598237}{2^{20}}\pi\right)\right| + \frac{12\pi}{2^{20}} = 1.3123896\ldots \end{aligned}$$

4.8. PROPOSITION. *Soit* $L(\alpha,\beta)$ *défini par* 1.8. *Pour tout* $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, *on a*

$$|L(\alpha,\beta)| \leq \left|L\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)\right| = \frac{4}{3}. \tag{4.10}$$

*En outre, si* $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}_5$ *(défini en* 4.4*) et* $(\alpha,\beta) \neq \left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$, *l'inégalité* (4.10) *est stricte.*

A l'aide de (4.6), on a

$$L(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{64^j}\Phi(64^j\alpha, 64^j\beta).$$

On a $64^j\frac{2\pi}{7} - \frac{2\pi}{7} = 2\pi\frac{64^j - 1}{7} \in 2\pi\mathbf{Z}$ car $64 \equiv 1 \pmod 7$. De même, $64^j\frac{4\pi}{7} - \frac{4\pi}{7} \in 2\pi\mathbf{Z}$. Donc, $\Phi\left(64^j\frac{2\pi}{7}, 64^j\frac{4\pi}{7}\right) = \Phi\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$ et

$$L\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) = \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{64^j}\right)\Phi\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right) = \frac{64}{63}\Phi\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right).$$

Il s'ensuit, par la formule (4.7), que

$$\left|L\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)\right| = \frac{64}{63}\,\frac{21}{16} = \frac{4}{3}.$$

D'autre part, par le lemme 4.7,

$$(4.11)\qquad |L(\alpha,\beta)| \le |\Phi(\alpha,\beta)| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{64^j}|\Phi(64^j\alpha, 64^j\beta)| \le \frac{21}{16}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{64^j}\right) = \frac{4}{3}.$$

Lorsque $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}_5$ et $(\alpha,\beta) \neq \left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$, encore par le lemme 4.7, on a $|\Phi(\alpha,\beta)| < \frac{21}{16}$ et (4.11) implique $|L(\alpha,\beta)| < \frac{4}{3}$.

4.9. COROLLAIRE. *Soit $T$ un triangle, $O = O(T)$ le centre, $R = R(T)$ le rayon de son cercle circonscrit et $L = L(T)$ le point défini en* 1.6. *Alors on a $OL \le \frac{4}{3}R$ et l'égalité a lieu si et seulement si les angles de $T$ sont $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$.*

Par le lemme 4.4, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}_5$ tel que $O(T)L(T) = R|L(\alpha,\beta)|$, et l'on applique la proposition 4.8.

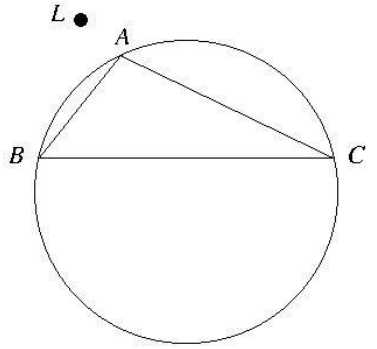


FIGURE 12
Le triangle d'angles $4\pi/7$, $2\pi/7$, $\pi/7$ et son point $L$

4.10. LEMME. *Soient deux nombres réels $h$ et $k$ vérifiant $0 < |h|, |k| \le 2^{-24}$ et $L$ la fonction définie en* 1.8. *Alors on a*

$$L\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right) \neq L\left(0, \frac{2\pi}{3}\right) = 0\,.$$

La fonction

$$(4.12)\qquad \Lambda(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{-2i\alpha} + e^{-2i\beta} + e^{2i(\alpha+\beta)}\right)$$

est périodique de période $2\pi$ en $\alpha$ et $\beta$. Comme pour la démonstration du lemme 4.6 nous ne donnons que les résultats principaux.

D'après 1.8, pour tout $n$ positif, on a

$$L\left(h, \frac{2\pi}{3}+k\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{4^j}\Lambda\left(4^j h, 4^j\left(\frac{2\pi}{3}+k\right)\right) + \frac{1}{4^{n+1}} L\left(4^{n+1}h, 4^{n+1}\left(\frac{2\pi}{3}+k\right)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{4^j}\Lambda\left(4^j h, \frac{2\pi}{3}+4^j k\right) + \frac{1}{4^{n+1}} L\left(4^{n+1}h, \frac{2\pi}{3}+4^{n+1}k\right) \tag{4.13}$$

car $4^j\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi\frac{4^j-1}{3} \in 2\pi\mathbf{Z}$.

On a:

$$\Lambda\left(0, \frac{2\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha}\left(0, \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{2i\pi/3}, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial\beta}\left(0, \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

$$\left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha^2}\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)\right| = \left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)\right| = \left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\beta^2}\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}.$$

Comme en 4.6, on majore les dérivées troisièmes:

$$\left|\frac{\partial^3\Lambda}{\partial\beta^3}\right| \le 5, \quad \left|\frac{\partial^3\Lambda}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}\right| \le \frac{5}{2}, \quad \left|\frac{\partial^3\Lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right| \le \frac{5}{2}, \quad \left|\frac{\partial^3\Lambda}{\partial\beta^3}\right| \le 5.$$

Pour $h$ et $k$ réels vérifiant $|h|, |k| \le \frac{1}{8}$, on en déduit les majorations

$$\left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha^2}\left(h, \frac{2\pi}{3}+k\right)\right| \le \frac{1}{2} + 5|h| + \frac{5}{2}|k| \le \frac{23}{16},$$

$$\left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(h, \frac{2\pi}{3}+k\right)\right| \le \frac{9}{8}, \qquad \left|\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\beta^2}\left(h, \frac{2\pi}{3}+k\right)\right| \le \frac{23}{16}.$$

Par la formule de Taylor, il vient pour $|h|, |k| \le \frac{1}{8}$

$$\Lambda\left(h, \frac{2\pi}{3}+k\right) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right) + R$$

avec

$$\begin{aligned}|R| &\le \frac{h^2}{2}\frac{23}{16} + |hk|\frac{9}{8} + \frac{k^2}{2}\frac{23}{16} = \frac{1}{32}\left(23h^2 + 36|hk| + 23k^2\right)\\ &= \frac{82}{32}\left(h^2 - |hk| + k^2\right) - \frac{59}{32}\left(|h| - |k|\right)^2 \le \frac{82}{32}\left(h^2 - |hk| + k^2\right)\\ &\le \frac{82}{32}\left(h^2 + hk + k^2\right) = \frac{41}{16}\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|^2.\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\Lambda\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right)(1+\eta) \tag{4.14}$$

avec

$$|\eta| \leq \frac{41}{16\sqrt{3}}\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right| = \frac{41}{16\sqrt{3}}\sqrt{h^2 + hk + k^2} \leq \frac{41}{16\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{41}{128}.$$

Posons $\lambda = \max(|h|, |k|) \leq \frac{1}{8}$. On a

$$\begin{aligned}\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|^2 = h^2 + hk + k^2 &= \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \\ &= \left(k + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h^2 \geq \frac{3\lambda^2}{4}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Définissons l'entier $n \geq 0$ par

$$4^n\lambda \leq \frac{1}{8} < 4^{n+1}\lambda. \tag{4.16}$$

Par (4.14), on a pour $j \leq n$

$$\frac{1}{4^j}\Lambda\left(4^j h, \frac{2\pi}{3} + 4^j k\right) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right)(1+\eta_j)$$

avec $|\eta_j| \leq \frac{41}{128}$, et, par (4.16),

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{4^j}\Lambda\left(4^j h, \frac{2\pi}{3} + 4^j k\right)\right| &\geq \sqrt{3}\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|\frac{87}{128}(n+1) \\ &\geq \frac{87\sqrt{3}}{128\log 4}\left(\log\frac{1}{\lambda} - \log 8\right)\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|.\end{aligned}$$

Par la proposition 4.8, (4.16) et (4.15), on a

$$\frac{1}{4^{n+1}}\left|L\left(4^{n+1}h, \frac{2\pi}{3} + 4^{n+1}k\right)\right| \leq \frac{4}{3\cdot 4^{n+1}} \leq \frac{32\lambda}{3} \leq \frac{64}{3\sqrt{3}}\left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|$$

et (4.13) entraîne

$$\left|L\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right)\right| \geq \left|e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right|\left\{\frac{87\sqrt{3}}{128\log 4}\left(\log\frac{1}{\lambda} - \log 8\right) - \frac{64}{3\sqrt{3}}\right\}.$$

Or, l'accolade ci-dessus est positive pour

$$\log\frac{1}{\lambda} > \log 8 + \frac{64}{3\sqrt{3}}\,\frac{128\log 4}{87\sqrt{3}} = \frac{18733}{783}\log 2 = (23.92\ldots)\log 2.$$

4.11. PROPOSITION. *La fonction $L$ et le triangle $\mathcal{T}_5$ ont été définis respectivement en* 1.8 *et* 4.4. *On a*

$$L(\alpha,\beta)=0 \quad et \quad (\alpha,\beta)\in\mathcal{T}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha=0 \quad et \quad \beta=\frac{2\pi}{3}\,.$$

Soit

$$\mathcal{D}=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathcal{T}_5\ ;\ \max\left(|\alpha|\,,\left|\beta-\frac{2\pi}{3}\right|\right)\geq\frac{\pi}{2^{26}}\right\}\,.$$

Compte tenu du lemme 4.10, il suffit de montrer que

$$M_{\mathcal{D}}=\min_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}}|L(\alpha,\beta)|>0\,.$$

Cela se vérifie en appliquant l'algorithme 4.3 à la fonction $-|L|$ : on majore $M(c,d;r)$ par (4.1) et l'on obtient pour $n=30$,

$$\begin{aligned}6.679\ldots10^{-7}&=\left|L\left(\frac{15}{2^{30}}\pi,\frac{715827875}{2^{30}}\pi\right)\right|-\frac{60\pi+6}{2^{30}}\leq M_{\mathcal{D}}\\&\leq\left|L\left(\frac{17}{2^{30}}\pi,\frac{715827873}{2^{30}}\pi\right)\right|=9.637\ldots10^{-7}\,.\end{aligned}$$

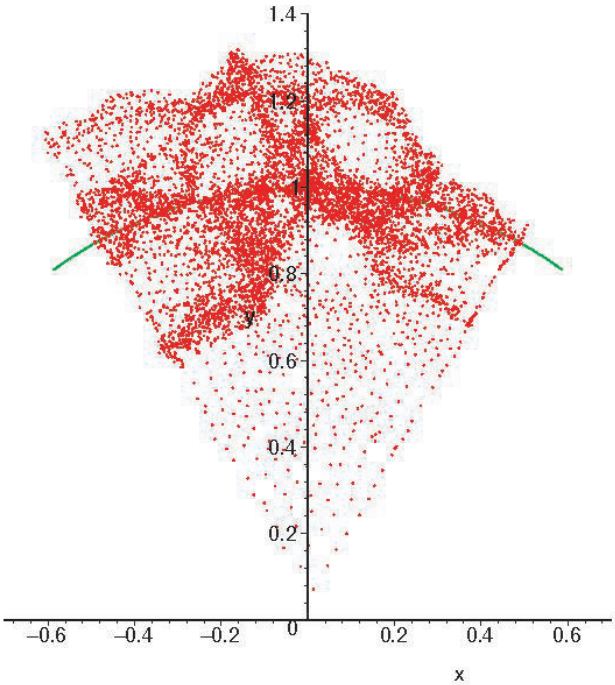


FIGURE 13
Image par $L$ du triangle $\mathcal{T}_5$

4.12. COROLLAIRE. *Soit $T$ un triangle tel que le point $L(T)$ défini en* 1.6 *soit égal au centre $O(T)$ de son cercle circonscrit. Alors, le triangle $T$ est équilatéral.*

Soit $R$ le rayon du cercle circonscrit à $T$. Par le lemme 4.4, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$ tel que $T$ soit égal au triangle $(Re^{i\alpha}, Re^{i\beta}, Re^{i\gamma})$ avec $\gamma = 2\pi - \alpha - \beta$. Mais on a $R|L(\alpha, \beta)| = O(T)L(T) = 0$, et l'on applique la proposition 4.11 : on a $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\gamma = \dfrac{4\pi}{3}$ et le triangle $(Re^{i\alpha}, Re^{i\beta}, Re^{i\gamma})$ est équilatéral.

4.13. Dans le plan $(\alpha, \beta)$, soit $\mathcal{T}'$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,\pi)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ : avec les notations de la figure 11, on a $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_5 \cup \mathcal{T}_6 \cup \mathcal{T}_7$. Soit $\mathcal{T}''$ et $\mathcal{T}'''$ les triangles de sommets $(0,\pi)$, $(0,2\pi)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $(\pi,\pi)$, $(0,2\pi)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

L'application $(\alpha, \beta) \mapsto (\beta, 2\pi - \alpha - \beta)$ transforme $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}'''$ et $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, 2\pi - \alpha - \beta)$ transforme $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}''$. Par les formules de 1.9, on obtient

$$L(\mathcal{T}') = L(\mathcal{T}'') = L(\mathcal{T}''') = L(\mathcal{T}_1).$$

On passe du triangle $\mathcal{T}_5$ au triangle $\mathcal{T}_6$ par la symétrie d'axe $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$, $\left(\frac{2\pi}{3} - \beta, \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \in \mathcal{T}_6$ et, par 1.9, on a

$$L\left(\frac{2\pi}{3} - \beta, \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} L(-\beta, -\alpha) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \overline{L(\alpha, \beta)}. \tag{4.17}$$

On passe de $\mathcal{T}_5$ à $\mathcal{T}_7$ par l'affinité oblique d'axe $\beta = \frac{2\pi}{3}$ qui transforme le point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ en $(0,\pi)$ : $(\alpha, \beta) \mapsto \left(\alpha + \beta - \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} - \beta\right)$ ; on a, par 1.9,

$$L\left(\alpha + \beta - \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} - \beta\right) = L\left(\frac{4\pi}{3} - \beta, \frac{4\pi}{3} - \alpha\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}} \overline{L(\alpha, \beta)}. \tag{4.18}$$

La figure 10 donne l'image par $L$ du triangle $\mathcal{T}_5$. Pour chaque point $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$ de la forme $\alpha = \dfrac{p\pi}{2^8}, \beta = \dfrac{q\pi}{2^8}$ (avec $p, q \in \mathbf{N}$), l'ordinateur a tracé le point $L(\alpha, \beta)$.

On constate que, pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_5$, $\dfrac{\pi}{3} \leq \arg(L(\alpha, \beta) \leq \dfrac{2\pi}{3}$, ce que nous espérons démontrer. Il résulterait alors de (4.17) et (4.18) que $(\alpha', \beta') \in \mathcal{T}_6 \Longrightarrow 0 \leq \arg(L(\alpha', \beta') \leq \frac{\pi}{3}$ et $(\alpha', \beta') \in \mathcal{T}_7 \Longrightarrow \frac{2\pi}{3} \leq \arg(L(\alpha', \beta) \leq \pi$. Ainsi, $L(\mathcal{T}') = L(\mathcal{T}_1)$ serait contenu dans le demi-plan supérieur, et, par (1.5), $L(\mathcal{T}_4)$ serait contenu dans le demi-plan inférieur.

## 5. Une propriété de l'ensemble des valeurs de $L(T)$

5.1. Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ des espaces topologiques, $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ une application, et $t_0 \in \mathcal{T}$. On dit que $F$ est localement surjective en $t_0$ si l'image par $F$ de tout voisinage de $t_0$ est un voisinage de $F(t_0)$.

5.2. On fixe jusqu'au n° 5.4 une fonction continue $\omega\colon ]0, a[\to]0, +\infty[$ telle que $t\omega(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

5.3. Soient $\Gamma$ un cercle de centre $O$ et de rayon strictement compris entre 0 et $a$ dans $\mathbf{R}^2$, et $\Delta$ le disque fermé de bord $\Gamma$. Soit $\varepsilon\colon \Delta \to \mathbf{R}^2$ une application continue telle que $|\varepsilon(x)| < |x|$ pour tout $x \in \Delta \setminus \{O\}$ (et donc $\varepsilon(O) = O$). On choisit partout la norme euclidienne.

Considérons l'application $x \mapsto F(x) = \omega(|x|)(x + \varepsilon(x))$ de $\Delta \setminus \{O\}$ dans $\mathbf{R}^2$. On a $F(x) \neq O$ pour tout $x \in \Delta \setminus \{O\}$. Posons $F(O) = O$. Alors $F$ est une application continue de $\Delta$ dans $\mathbf{R}^2$.

Lemme. *$F$ est localement surjective en $O$.*

On va imiter une des démonstrations du théorème de Brouwer dans le plan (cf. [1], p. 279, problème 3). Soit $\gamma$ la restriction de $F$ à $\Gamma$ ; c'est un lacet dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ ($\Gamma$ étant orienté de la manière habituelle).

Pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \Gamma$, soit $\gamma_t(x) = \omega(|x|)(x + t\varepsilon(x))$. Notons que $\omega(|x|)$ est égal à une constante $\lambda > 0$ sur $\Gamma$. Les $\gamma_t$ sont des lacets dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ et définissent une homotopie de $\gamma = \gamma_1$ au lacet $\gamma_0\colon x \mapsto \lambda x$. Donc l'indice $j(O, \gamma)$ est égal à $j(O, \gamma_0) = 1$.

Comme $\gamma(\Gamma) \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$, il existe un disque ouvert $\Delta'$ de centre $O$ qui ne rencontre pas $\gamma(\Gamma)$. Comme $\Delta'$ est connexe, l'indice $j(x, \gamma)$ est constant quand $x$ parcourt $\Delta'$, donc égal à $j(O, \gamma) = 1$. Nous allons montrer que $F(\Delta) \supset \Delta'$. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in \Delta'$ tel que $x_0 \notin F(\Delta)$. Évidemment, $x_0 \neq O$.

Pour $r \in [0, 1]$ et $x \in \Gamma$, posons $\gamma^r(x) = F(rx)$. On définit ainsi une homotopie de $\gamma$ sur le lacet réduit à $O$. Puisque $x_0 \notin F(\Delta)$, l'indice $j(x_0, \gamma^r)$ est défini pour tout $r \in [0, 1]$. Il dépend continûment de $r$, donc est constant, donc égal à $j(x_0, \gamma) = 1$. Mais $j(x_0, \gamma^0)$ est évidemment égal à 0, contradiction.

Donc $F(\Delta) \supset \Delta'$. Appliquons ce résultat en remplaçant $\Delta$ par un disque de centre $O$ arbitrairement petit : on obtient le lemme.

5.4. LEMME. *On conserve les notations de 5.3. On suppose de plus que*

1. $\omega(t) \to \infty$ *quand* $t \to 0$ ;

2. *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $|\varepsilon(x)| < (1-\eta)|x|$ *pour* $x \neq 0$.

*Soit* $H\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *une application telle que* $H(O) = O$ *et que* $H$ *soit différentiable en* $O$. *Alors,* $F + H$ *est localement surjective en* $O$.

Il existe une constante $c > 0$ telle que $|H(x)| \leq c|x|$ pour $|x|$ assez petit. On a, pour $x \neq 0$,

$$(F+H)(x) = \omega(|x|)\left(x + \varepsilon(x) + \frac{H(x)}{\omega(|x|)}\right).$$

Si $x$ est assez petit, on a

$$\left|\varepsilon(x) + \frac{H(x)}{\omega(|x|)}\right| < \left(1 - \eta + \frac{c}{\omega(|x|)}\right)|x| < |x|$$

et il suffit d'appliquer 5.3.

5.5. On utilisera l'application $u\colon (h,k) \mapsto e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, et on la considérera comme une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. On a

$$|u(h,k)|^2 = \left|-\frac{1}{2}h - k + i\frac{\sqrt{3}}{2}h\right|^2 = \left(\frac{1}{2}h + k\right)^2 + \frac{3}{4}h^2 = h^2 + hk + k^2.$$

Lorsque $h^2 + k^2 = 1$, $h^2 + hk + k^2$ est maximum pour $h = k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut alors $\frac{3}{2}$ et est minimum pour $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, et vaut alors $\frac{1}{2}$. D'où

$$\|u\| = \sqrt{3/2}, \qquad \|u^{-1}\| = \sqrt{2}.$$

5.6. On pose, comme dans 4.10,

$$\Lambda(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{-2i\alpha} + e^{-2i\beta} + e^{2i(\alpha+\beta)}\right).$$

Pour $h, k \in \mathbf{R}$, $|h| \leq \frac{1}{8}$, $|k| \leq \frac{1}{8}$, on a

$$\Lambda\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}h - k\right)(1+\eta)$$

avec $|\eta| \leq \frac{41}{128}$. Cela est prouvé au début de la preuve du lemme 4.10.

5.7. LEMME. *Pour $t > 0$, on pose $\omega(t) = (-\log 8 - \log t)/\log 4$. Alors, pour $(h,k) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$, la fonction $L$ définie en* (0.1) *vérifie*

$$L\Big(h, \frac{2\pi}{3} + k\Big) = \sqrt{3}\, u\Big[\omega(|(h,k)|)((h,k) + \sigma(h,k))\Big]$$

*avec $|\sigma(h,k)| \leq 0.6\,|(h,k)|$ pour $|(h,k)|$ assez petit ( $|\ |$ est, on le rappelle, la norme euclidienne).*

A l'aide de la fonction $\Lambda$ introduite en 5.6, on a

$$L\Big(h, \frac{2\pi}{3} + k\Big) = \Lambda\Big(h, \frac{2\pi}{3} + k\Big) + \frac{1}{4}\Lambda\Big(4h, \frac{2\pi}{3} + 4k\Big) + \dots$$
$$+ \frac{1}{4^n}\Lambda\Big(4^n h, \frac{2\pi}{3} + 4^n k\Big) + \dots$$

Définissons l'entier $n$ par

$$4^n|(h,k)| \leq \frac{1}{8} < 4^{n+1}|(h,k)|\,.$$

Alors, si $0 \leq j \leq n$,

$$\frac{1}{4^j}\Lambda(4^j h, \frac{2\pi}{3} + 4^j k) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(1 + \lambda_j)$$

avec $|\lambda_j| \leq 41/128$ d'après 5.6. Par ailleurs,

$$n \leq \frac{1}{\log 4}(-\log 8 - \log(|(h,k)|)) = \omega(|(h,k)|) < n + 1\,,$$
$$n + 1 = \omega(|(h,k)|) + \zeta(h,k)$$

avec $|\zeta(h,k)| \leq 1$. On a

$$\Lambda\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right) + \dots + \frac{1}{4^n}\Lambda\left(4^n h, \frac{2\pi}{3} + 4^n k\right)$$
$$= \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(n + 1 + \lambda_0 + \dots + \lambda_n)$$
$$= \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(\omega(|(h,k)|) + \zeta(h,k) + \lambda)$$

avec $|\lambda| \leq \frac{41}{128}(n+1)$, donc

$$|\zeta(h,k) + \lambda| \leq \frac{169}{128} + n\frac{41}{128} \leq \frac{169}{128} + \frac{41}{128}\omega(|(h,k)|)\,.$$

D'autre part, comme $|\Lambda(\alpha,\beta)|$ est trivialement majoré par $\frac{9}{4}$,

$$\Big|\sum_{j>n} \frac{1}{4^j}\Lambda\Big(4^j h, \frac{2\pi}{3} + 4^j k\Big)\Big| \leq \frac{3}{4^{n+1}} < 3 \cdot 8|(h,k)| = 24|(h,k)|$$

donc

$$\sum_{j>n} \frac{1}{4^j}\Lambda\Big(4^j h, \frac{2\pi}{3} + 4^j k\Big) = \sqrt{3}\big(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\big)\rho(h,k)$$

avec

$$|\rho(h,k)| \leq 24|(h,k)|\frac{1}{\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{2}}|(h,k)|} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Donc,

$$L\Big(h, \frac{2\pi}{3} + k\Big) = \sqrt{3}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(\omega(|(h,k)|) + \rho'(h,k))$$

avec

$$|\rho'(h,k)| \leq \frac{169}{128} + \frac{41}{128}\omega(|(h,k)|) + \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 21 + \frac{41}{128}\omega(|(h,k)|)$$

ou encore

$$L\left(h, \frac{2\pi}{3} + k\right) = \sqrt{3}\,\omega(|(h,k)|)\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(1 + \rho''(h,k))$$

avec

$$|\rho''(h,k)| \leq \frac{41}{128} + \frac{21}{\omega(|(h,k)|)}.$$

Or $\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} h - k\right)(\rho''(h,k)) = u(\sigma(h,k))$, avec

$$\begin{aligned}|\sigma(h,k)| &\leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,|(h,k)|\left(\frac{41}{128} + \frac{21}{\omega(|(h,k)|)}\right)\\ &< 0.6\,|(h,k)|, \qquad \text{pour } |(h,k)| \text{ assez petit.}\end{aligned}$$

5.8. PROPOSITION. *Soient* $\alpha_0 = 2^{-n}\frac{k\pi}{3}$, $\beta_0 = 2^{-n}\frac{k'\pi}{3}$, *où* $n, k, k' \in \mathbf{Z}$, $k \equiv 0 \pmod 3$, $k' \equiv 1 \pmod 3$. *Alors la fonction* $(\alpha,\beta) \mapsto L(\alpha,\beta)$ *est localement surjective en* $(\alpha_0,\beta_0)$. *En particulier,* $L$ *est localement surjective en* $(0, 2\pi/3)$.

On a

$$L(\alpha,\beta) = P(\alpha,\beta) + \frac{1}{2^{n+1}}L(2^{n+1}\alpha, 2^{n+1}\beta)$$

où $P$ est différentiable, et

$$2^{n+1}\alpha_0 = \frac{2k\pi}{3} \in 2\pi\mathbf{Z}, \qquad 2^{n+1}\beta_0 = \frac{2k'\pi}{3} \in \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z},$$

donc

$$\begin{aligned}
L(\alpha_0+h,\beta_0+k) &= P(\alpha_0+h,\beta_0+k)+\frac{1}{2^{n+1}}L\left(2^{n+1}h,\frac{2\pi}{3}+2^{n+1}k\right)\\
&= P(\alpha_0+h,\beta_0+k)\\
&\qquad+\frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{3}\,u\left[\omega(|(2^{n+1}h,2^{n+1}k)|)((2^{n+1}h,2^{n+1}k)+\sigma(2^{n+1}h,2^{n+1}k))\right]\\
&= \sqrt{3}\,u\left[(\sqrt{3}\,u)^{-1}P(\alpha_0+h,\beta_0+k)+\omega(|(2^{n+1}h,2^{n+1}k)|)((h,k)+\sigma'(h,k))\right]
\end{aligned}$$

avec

$$|\sigma'(h,k)| = \frac{1}{2^{n+1}}\left|\sigma(2^{n+1}h,2^{n+1}k)\right| \le \frac{(0.6)}{2^{n+1}}|(2^{n+1}h,2^{n+1}k)| = (0.6)|(h,k)|$$

pour $|(h,k)|$ assez petit. On applique alors le lemme 5.4.

5.9. REMARQUE. $L$ n'est pas un homéomorphisme local aux points $(\alpha_0,\beta_0)$ de 5.8. Par exemple, $t\mapsto x(t)$ n'est injectif dans aucun voisinage de $t=\pi/3$, à cause des oscillations fines de $x(t)$.

5.10. PROPOSITION. *L'image $K$ de l'application $L$ est l'adhérence de son intérieur.*

Les points $(\alpha_0,\beta_0)$ de 5.8 sont denses dans $\mathbf{R}^2$, donc leurs images par $L$ sont denses dans $K$. Or tout point $L(\alpha_0,\beta_0)$ est, d'après 5.8, centre d'un disque ouvert non vide contenu dans $K$. D'où la proposition.

## 6. NOTE SUR LES SECTIONS 2.8 ET 3.1

La méthode employée en 2.8 fait partie du folklore de l'analyse harmonique. A notre connaissance, l'idée d'évaluer un coefficient de Fourier situé en un point isolé du spectre en tenant compte des lacunes à gauche et à droite a été utilisée pour la première fois par Mark Edward Noble dans son article de *Mathematische Annalen 128* (1954), 55–62, "Coefficient properties of Fourier series with a gap condition"; les formules de Fourier avec poids sont clairement exposées au début de l'article, et permettent l'évaluation des coefficients à partir de la donnée de la fonction sur un petit intervalle. L'idée de partir du voisinage d'un point au lieu d'un intervalle revient à Masako Sakô (plus tard Izumi) dans ses articles des *Proceedings of the Japan Academy 31* (1956), 402–405 et 508–510, "Lacunary Fourier Series I, II". Une exploitation systématique en a été faite par Shin-ichi et Masako Izumi et Jean-Pierre Kahane pour l'étude du comportement local des fonctions dont la série de Fourier est lacunaire à la Hadamard dans l'article "Théorèmes élémentaires sur les séries de Fourier lacunaires" du *Journal d'Analyse Mathématique 14* (1965), 235–246. Un abrégé du contenu se trouve dans le rapport de J.-P. Kahane au congrès de l'American

Mathematical Society à New York en 1963, "Lacunary Taylor and Fourier Series", publié dans le *Bulletin de l'American Mathematical Society 70* (1964), 199–213. Depuis lors, la méthode et son exploitation sont devenues banales.

## RÉFÉRENCES


[1] DIEUDONNÉ, J. *Éléments d'analyse, t. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[2] FAN, A. and J. SCHMELING. On fast Birkhoff averaging. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 135* (2003), 443–467.

[3] HARDY, G. H. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc. 17* (1916), 301–325.

[4] Le système MAPLE de calcul formel : http://www.maplesoft.com/

[5] MARDEN, M. *Geometry of Polynomials*. Amer. Math. Soc., Survey *6*, 2nd ed., 1966.

[6] STOER, J. and R. BULIRSCH. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, 1980.

[7] ZYGMUND, A. *Trigonometrical Series*. Monografje Matematyczne V, Varsovie, 1935. 2nd ed., Chelsea, New-York, 1952. 3rd ed. (with a foreword by R. F. Fefferman), Cambridge Univ. Press, 2002.


*(Reçu le 4 septembre 2006 ; version révisée reçue le 15 juin 2007)*


Jacques Dixmier
11 bis, rue du Val-de-Grâce
F-75005 Paris
France

Jean-Pierre Kahane
11, rue du Val-de-Grâce
F-75005 Paris
France
*e-mail :* jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr

Jean-Louis Nicolas
Institut Camille Jordan, UMR 5208
Bâtiment Doyen Jean Braconnier
Université Claude Bernard (Lyon 1)
21, avenue Claude-Bernard
F-69622 Villeurbanne Cedex
France
*e-mail :* jlnicola@in2p3.fr