

# Über die Initialphase des Ausflusses aus Gefässen mit Rohransatz

Autor(en): **Müller, Aloys / Lambossy, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles =  
Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg**

Band (Jahr): **37 (1942-1944)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-308179>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über die Initialphase des Ausflusses aus Gefäßen mit Rohransatz

VON ALOYS MÜLLER und PAUL LAMBOSSY.

Der Ausfluss aus Gefäßen bei stationärer Strömung wurde sehr frühzeitig von Experimentatoren und Theoretikern untersucht. Es liegt hierüber eine umfassende Literatur vor. Im Gegensatze hiezu sind die Untersuchungen über den nicht stationären Ausfluss recht spärlich. Ein gewisses Interesse hat die Entleerungszeit eines Reservoirs ohne Zufluss gefunden. Die Behandlung dieses speziellen Falles war für den Bauingenieur von besonderem praktischen Interesse.

Sehr vernachlässigt wurde die Untersuchung der nicht stationären Anfangsphase des Ausflusses. Für den Kreislaufforscher sind gerade diese Verhältnisse von besonderer Bedeutung, weil das Herz das in Ruhe befindliche Blut in einer bestimmten Zeit in ein Leitungssystem wirft. Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck diese bestehende Lücke in der Lehre vom Ausflusse teilweise auszufüllen, indem einige Ergebnisse bei besonders ausgewählten, einfachen Versuchsbedingungen mitgeteilt werden. Ferner sollen die mit einfachen Modellen gemachten Erfahrungen und die gewonnenen Resultate dazu benützt werden, Versuche mit komplizierteren Modellen anzustellen und sie einer theoretischen Behandlung zugänglich zu machen oder wenigstens deren Ergebnisse rationell soweit zu interpretieren, dass eine tiefere Einsicht in dem Entleerungsmechanismus des Herzens möglich wird.

In der älteren Literatur behandelt RÜHLMANN<sup>1</sup> den Ausfluss aus Gefäßen mit nicht vertikaler Achse, wenn der Beharrungszu-

---

<sup>1</sup> RÜHLMANN MORITZ, *Hydromechanik*. Hannover 1879. Erstes Heft § 80

stand noch nicht eingetreten ist. Wir werden das gleiche Problem unserer theoretischen Betrachtung als Ausgangspunkt zugrunde legen und in anderer Form entwickeln. In neuerer Zeit hat GRUMBACH A.<sup>1</sup> im Hinblick auf die Viskosimetrie die veränderliche Anfangsphase des Ausflusses durch eine vertikal gelagerte, lange Kapillare theoretisch behandelt. Er geht von den Navier-Stokes'schen Gleichungen aus, die bei Laminärströmung, also Berücksichtigung der achsenparallelen Geschwindigkeit allein,

$$r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{g}{\mu} r = \frac{r}{\mu} \frac{\partial v}{\partial t}$$

werden, wobei  $v$  die Geschwindigkeit,  $r$  den Abstand von der Röhrenachse und  $\mu$  die kinematische Zähigkeit =  $\frac{\text{Zähigkeit}}{\text{Dichte}}$

bedeutet. Bei stationärem Zustande wird:  $w = \frac{g}{4\mu} (a^2 - r^2)$

$a$  = Radius der Kapillare.  $g$  tritt an Stelle des Druckgefälles  $\frac{p_a - p_o}{l}$  oder  $\varrho \cdot g \frac{(h - h_o)}{l}$ , wobei  $h - h_o = l$  und  $\varrho = 1$  gesetzt wird.

$$\text{Setzt man } v = w + f(r, t)$$

so ergibt sich aus den 2 vorausgehenden Gleichungen:

$$r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r}{\mu} \frac{\partial f}{\partial t}$$

eine Differentialgleichung, die nach der Methode von FOURIER gelöst werden kann. Als Ergebnis findet GRUMBACH bei Vernachlässigung der weiteren Glieder der Reihe:

$$Q = \frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} \left[ t - \frac{32 a^2}{\mu a_1^6} \left( 1 - e^{-\frac{a_1^2}{a^2} \mu t} \right) \right]$$

$Q$  stellt die Ausflussmenge in der Zeit  $t$  dar,  $a_1 = 2,405$ .

Bei der Wahl einer Kapillare mit dem Durchmesser  $2a = 1$  mm und Wasser mit der Dichte  $\varrho = 1,0$  und der Zähigkeit  $\mu = 0,01$  als Flüssigkeit erhält man:

<sup>1</sup> GRUMBACH ALBERT, *La période variable de l'écoulement d'un liquide dans un tube capillaire indéfini*. Comptes-Rendus 1936, S. 1653.

$$\frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} = \frac{\pi \cdot 981 \cdot (0,05)^4}{8 \times 0,01} = 0,241$$

$$\frac{32 a^2}{\mu \cdot \alpha_1^6} = \frac{32 \times (0,05)^2}{0,01 \times (2,405)^6} = 0,0413$$

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2} \mu = \frac{(2,405)^2 \times 0,01}{(0,05)^2} = 23,1$$

Daraus ergibt sich, dass nach 0,3 Sekunden bereits der stationäre Zustand erreicht ist, denn für  $t > 0,3$  wird  $e^{-\frac{\alpha_1^2}{a^2} \mu t} = e^{-23,1 t} < 0,001$

$$\text{also: } Q = \frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} \left( t - \frac{32 a^2}{\mu \cdot \alpha_1^6} \right) = \frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} (t - 0,0413)$$

wobei  $\frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} t$  das Flüssigkeitsvolumen nach POISEUILLE

darstellt. Die Verspätung von 0,041 Sek. resp. der Volumenausfall

von:  $0,0413 \frac{\pi \cdot g \cdot a^4}{8 \mu} = 0,041 \times 0,241 = 0,01$  ccm ist Folge

der Initialphase. Während bei Verkleinerung des Kapillardurchmessers die Initialphase bald vernachlässigt werden kann, wird sie bei Vergrößerung des Rohrdurchmessers merklich gross. Bei Durchmessern von 1,0 bzw. 2,0 cm wäre der stationäre Zustand nach dieser Formel erst nach 30 bzw. 120 Sek. erreicht. Allerdings treten bei diesen Röhren bereits Strömungen auf, für die die von GRUMBACH bei der Anwendung der Bewegungsgleichungen gemachten Voraussetzungen nicht mehr zutreffen.

Experimentelle Ergebnisse werden weder von RÜHLMANN noch von GRUMBACH erwähnt.

### Ideale Flüssigkeiten.

Zur Aufstellung der Differentialgleichung für veränderliche Strömungen werde analog RÜHLMANN die Strömung in einem beliebig gekrümmten Gefässe mit veränderlichem Querschnitte aber unnachgiebiger Wandung betrachtet. Im Gegensatze zu RÜHLMANN kann das Gefäss beliebig weit sein (vgl. Abb. 1). Die Flüssigkeit sei

ideal also inkompressibel und reibungslos. Eine bestimmte Flüssigkeitsmasse  $M$  nehme z. Zt.  $t$  den Gefässinnenraum  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , z. Zt.  $t + dt$  den Raum  $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$  ein.  $M$  ändert damit ihre kinetische Energie. Diese Änderung im Verlaufe des Zeitintervalles  $dt$  ist gleich der kinetischen Energie von  $M$  in der Lage  $A'_1 A'_3$  vermindert um die kinetische Energie derselben Masse in der Lage  $A_1 A_3$ .

Sie besteht aus einem Zuwachs im Betrage von:  $\frac{1}{2} \rho \cdot Q_2 \cdot dx_2 \cdot v^2$

und einem Verluste im Betrage von:  $\frac{1}{2} \rho \cdot Q_1 \cdot dx_1 \cdot V^2$

Dabei bedeuten  $v$  bzw.  $V$  die Geschwindigkeit z. Zt.  $t$  in  $A_1 A'_1$  bzw.  $A_3 A'_3$  und  $Q_2 \cdot dx_2$  bzw.  $Q_1 dx_1$  das Volumen der aus dem betrachteten Raume abströmenden bzw. in den Raum einströmenden Flüssigkeit.

Die dadurch entstandene Änderung der kinetischen Energie

beträgt: 
$$\frac{1}{2} \rho \left( Q_2 dx_2 \cdot v^2 - Q_1 dx_1 \cdot V^2 \right)$$

und mit Berücksichtigung, dass nach dem Kontinuitäts-Gesetze

$Q_2 \cdot dx_2 = Q_1 dx_1$  ist:  $\frac{1}{2} \rho Q_2 \cdot dx_2 \left( v^2 - V^2 \right)$

oder, da  $V = v \frac{Q_2}{Q_1}$  ist:  $\frac{1}{2} \rho \cdot Q_2 \cdot dx_2 \left( 1 - m^2 \right) v^2 \dots\dots\dots (1)$

wenn  $m = \frac{Q_2}{Q_1}$  gesetzt wird.

Im gemeinsamen Raume  $A'_1 A'_2 A_3 A_4$  tritt aber auch eine Änderung der kinetischen Energie auf. Betrachtet man das Flüssigkeitselement mit dem Querschnitte  $q$  und der Länge  $dx$  (vgl. Abb 1). Besitzt dessen Schwerpunkt z. Zt.  $t$  die Geschwindigkeit  $u$ , so beträgt seine kinetische Energie in diesem Zeitpunkte:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot q \cdot dx \cdot u^2$$

Die Änderung dieser kinetischen Energie während des Zeitintervalles  $dt$  ist gleich dem Differential des Ausdruckes, also

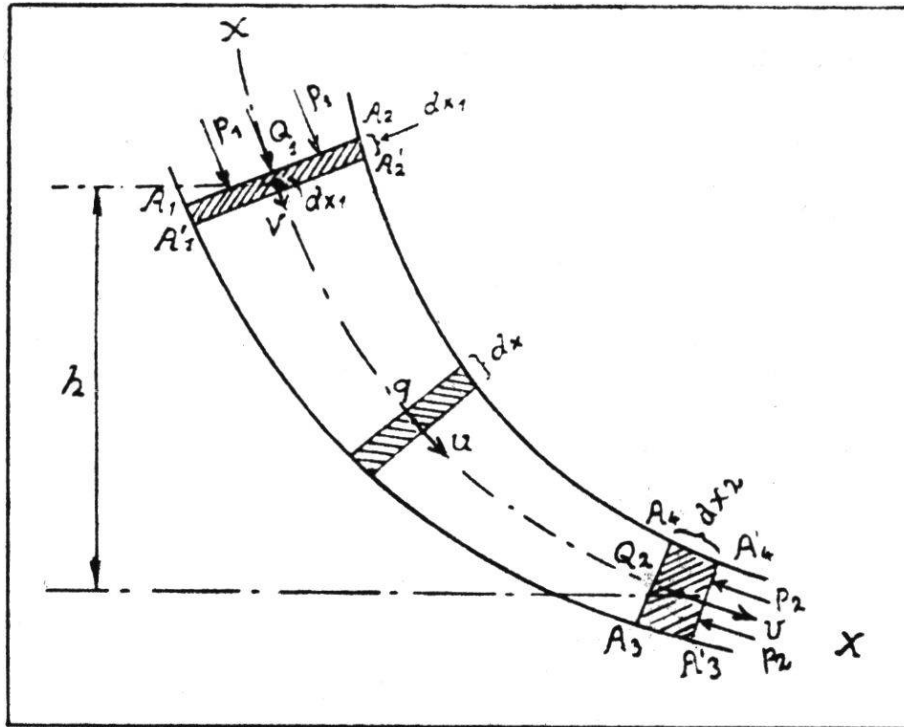


Abb. 1.

$$\frac{1}{2} \rho \cdot q \cdot dx \cdot 2 u \cdot du \quad \text{oder} \quad \rho \cdot q \cdot dx \cdot u \cdot du$$

da  $q \cdot dx$  eine Konstante ist. — Sie stellt nämlich, das Volumen der unserer Betrachtung zugrunde gelegten unveränderlichen Flüssigkeitsmasse dar. —

Um  $u$  als Funktion von  $v$  auszudrücken, wendet man wieder das

Kontinuitätsgesetz an, es ist  $u \cdot q = Q_2 \cdot v$ , also  $u = \frac{Q_2}{q} v$  und

$$du = \frac{Q_2}{q} \cdot dv \quad \text{und daraus} \quad \rho \cdot q \cdot dx \cdot u \cdot du = \rho \cdot q \cdot dx \cdot \frac{Q_2}{q} v \cdot \frac{Q_2}{q} dv =$$

$\rho \cdot Q_2^2 v \cdot dv \cdot \frac{dx}{q}$ . Die Änderung der kinetischen Energie der gesamten im gemeinsamen Raume befindlichen Flüssigkeitsmasse ist

gleich der Summe der Energieänderungen der in ihm enthaltenen Flüssigkeitselemente, also:

$$\rho \cdot Q_2^2 \cdot v \cdot dv \int_1^2 \frac{dx}{q} \quad \dots\dots (2)$$

wenn 2 bzw. 1 den Wert von  $x$  im Querschnitte  $Q_2$  bzw.  $Q_1$  bedeutet.

In unserem Falle ist das Integral  $\int_1^2 \frac{dx}{q}$  eine Konstante, weil

die starre Kanalwandung zeitlich unveränderlich bleibt. Es soll mit  $N$  bezeichnet werden.

Auf die Flüssigkeitsmasse  $M$  wirken Massen- und Oberflächenkräfte. Als Massenkraft braucht nur die Schwerkraft berücksichtigt zu werden.

Die Arbeit der Schwerkraft erhält man am einfachsten, indem man sich vorstellt, dass die in ihrem Schwerpunkte konzentriert gedachte Flüssigkeitsmasse  $Q_1 \cdot dx_1$  unter der Wirkung der Schwerkraft die Höhe  $h$  herunterfällt um die Stelle der ausströmenden Flüssigkeitsmasse  $Q_2 \cdot dx_2$  einzunehmen. Darnach erhält man:

$$A_1 = \varrho \cdot Q_1 \cdot dx_1 \cdot h \cdot g \quad \text{oder} \quad Q_2 \cdot dx_2 \cdot \varrho \cdot g \cdot h \quad \dots\dots (3)$$

Als Oberflächenkraft wirkt auf dem Querschnitte  $Q_1$  der Druck  $p_1$ . Seine Arbeit ist  $Q_1 \cdot p_1 \cdot dx_1$ . Auf den Querschnitt  $Q_2$  wirkt der Druck  $-p_2$ , weil die Richtung derjenigen von  $x$  entgegengesetzt ist. Die Arbeit beträgt  $-Q_2 \cdot p_2 \cdot dx_2$ . Die Gesamtarbeit der Oberflächenkräfte beträgt:

$$A_2 = Q_1 \cdot dx_1 \cdot p_1 - Q_2 \cdot dx_2 \cdot p_2 \quad \text{oder} \quad Q_2 \cdot dx_2 (p_1 - p_2) \quad \dots\dots (4)$$

Nach dem Satze der Erhaltung der Energie muss die Änderung der kinetischen Energie gleich der Arbeit der äussern Kräfte sein, also:

$$\frac{1}{2} \varrho \cdot Q_2 \cdot dx_2 (1 - m^2) v^2 + \varrho Q_2^2 \cdot N v \cdot dv = \varrho Q_2 \cdot dx_2 g \cdot h + Q_2 \cdot dx_2 (p_1 - p_2)$$

oder durch  $\varrho \cdot Q_2 \cdot dx_2$  dividiert

$$\frac{1}{2} (1 - m^2) v^2 + Q_2 N \cdot v \frac{dv}{dx_2} = g \cdot h + \frac{p_1 - p_2}{\varrho}$$

Mit 2 multipliziert erhält man unter Berücksichtigung, dass  $dx_2 = v \cdot dt$  ist, die gesuchte Differentialgleichung:

$$(1 - m^2) v^2 + 2 Q_2 \cdot N \frac{dv}{dt} = 2 g \cdot h + \frac{2 (p_1 - p_2)}{\varrho} \quad \dots\dots (5)$$

Bei stationärer Strömung, also  $\frac{dv}{dt} = 0$ , wird diese Gleichung:

$$(1 - m^2) v^2 = 2 g h + \frac{2 (p_1 - p_2)}{\varrho}$$

und die Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2 g h + \frac{2 (p_1 - p_2)}{\varrho}}{1 - m^2}} \quad \text{resp} \quad \sqrt{2 g h}$$

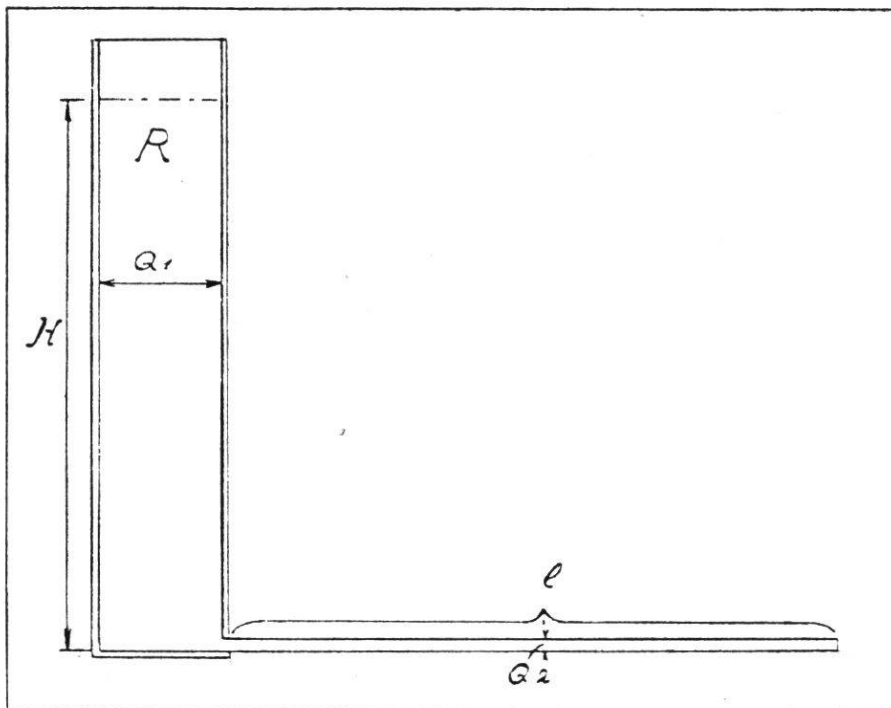


Abb. 2.

wenn  $Q_1$  gross gegenüber  $Q_2$  ist und in  $Q_1$  und  $Q_2$  der gleiche Druck herrscht.

An Stelle des Kanals der Abb. 1 betrachte man nun das zylinderförmige Reservoir  $R$  mit dem Querschnitte  $Q_1$  und der angesetzten gleichmässigen Röhre mit dem Querschnitte  $Q_2$  der Abb. 2. Auf der Flüssigkeitsoberfläche des Reservoirs und am Ende der Röhre herrsche Atmosphärendruck. Es ist also  $p_1 = p_2 = p_0$ . Ferner sei  $Q_1$  gegenüber  $Q_2$  sehr gross, sodass  $m^2$  gegenüber 1 vernachlässigt

werden kann. Gleichung 5 wird dann:  $v^2 + 2 Q_2 N \frac{dv}{dt} = 2 g h$  oder



mit Benützung des oben dargestellten Torricelli'schen Gesetzes

$$v^2 + 2 Q_2 N \frac{dv}{dt} = v_0^2 \quad \dots\dots (6)$$

wobei  $v_0$  die Ausflussgeschwindigkeit bei stationärem Zustande bedeutet. Zur Integration dieser Gleichung setzt man

$$2 Q_2 N \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = dt$$

Nun ist: 
$$\frac{1}{v_0^2 - v^2} = \frac{1}{2 v_0} \left( \frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{v_0 + v} \right)$$

Nach Einsetzen dieses Wertes folgt:

$$\frac{Q_2 \cdot N}{v_0} \left( \frac{dv}{v_0 - v} + \frac{dv}{v_0 + v} \right) = dt$$

und integriert:

$$\frac{Q_2 \cdot N}{v_0} \left[ -\ln (v_0 - v) + \ln (v_0 + v) \right] = t + C \quad \dots\dots (7a)$$

Für  $t = 0$  ist offenbar  $v = 0$ . Daraus ergibt sich, dass  $C = 0$  ist.

Gleichung (7a) wird demnach: 
$$t = \frac{Q_2 \cdot N}{v_0} \cdot \ln \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \quad \dots\dots (7)$$

als endgültige Lösung. Bei entsprechender Umformung der von RÜHLMANN angegebenen Gleichung gelangt man ebenfalls zu dieser Lösung.

$N$  stellt das Integral  $\int_1^2 \frac{dx}{q}$  dar, wie oben entwickelt wurde. Im

Falle der Abb. 2 ist dieses Integral für das Reservoir  $= \frac{h}{Q_1}$  und

für die Röhre  $\frac{l}{Q_2}$ , wenn  $l$  die Länge derselben darstellt. Daraus

folgt: 
$$N = \frac{h}{Q_1} + \frac{l}{Q_2} \quad \text{oder} \quad Q_2 N = \frac{Q_2}{Q_1} h + l = mh + l$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (7) ein, so ergibt sich:

$$l = \frac{mh + l}{v_0} \ln \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \dots\dots (8)$$

Zur Berechnung der veränderlichen Geschwindigkeit  $v$  setzt man

$$r = \frac{v_0}{mh + l}$$

Es wird dann

$$\ln \frac{v_0 + v}{v_0 - v} = rl \quad \text{oder} \quad \frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \ln^{rl} \quad \text{und} \quad v = v_0 \cdot \frac{e^{rl} - 1}{e^{rl} + 1}$$

Da  $r$  positiv ist, strebt der Wert des Bruches für  $l = \infty$  nach 1 und es wird  $v = v_0$ , was gefordert wird.

Zur experimentellen Nachprüfung der theoretisch erhaltenen Resultate wurde eine von der Abb. 2 abweichende Vorrichtung benützt. Der Flüssigkeitsbehälter setzte sich aus drei Teilen zusammen. Der oberste Teil war ein weites, flaches Zylindergefäß mit einem Radius von 50 cm, das auf dem mittleren Teile, einem auswechselbaren Rohre von 7,5 cm Radius, befestigt werden konnte. Dieses letztere war auf einem Bodengefässe mit einem Radius von 15 cm und einer Höhe von 30 cm montiert (vgl. Abb. 3). Das dickwandige Bodengefäss besass verschiedene Öffnungen, die ausser zum Ansetzen des Ausflussrohres, nach Belieben verschlossen oder zum Einführen von Messinstrumenten benützt werden konnten. Die spezielle Form des Behälters wurde aus technischen Gründen gewählt. Das oberste Gefäss verhütete hauptsächlich eine merkliche Änderung der Niveaudifferenz während der Versuchszeit. An das Bodengefäss wurde das kurze Ansatzstück angesetzt, das auf der Abb. 3 mit den entsprechenden Dimensionen wiedergegeben ist. Von oben gesehen besass der Ansatz die konkave Krümmung des Bodengefässes, sodass dieser genau in der Ebene der Wand desselben lag. Die besondere Form und die Länge des Ausflussrohres waren derart ausgewählt, dass der Einfluss der Kontraktion und der Reibung auf ein Mindestmass reduziert wurde. Die experimentelle Bestimmung des Ausflusses ergab für Wasser bei

Druckhöhen zwischen 30 und 140 cm einen Ausflusskoeffizienten  $\psi$  mit den Grenzwerten 0,97 und 0,95. Das Versuchsmodell konnte also zur Nachprüfung der aufgestellten Formel, die nur für ideale Flüssigkeiten gilt, mit Erfolg benützt werden.

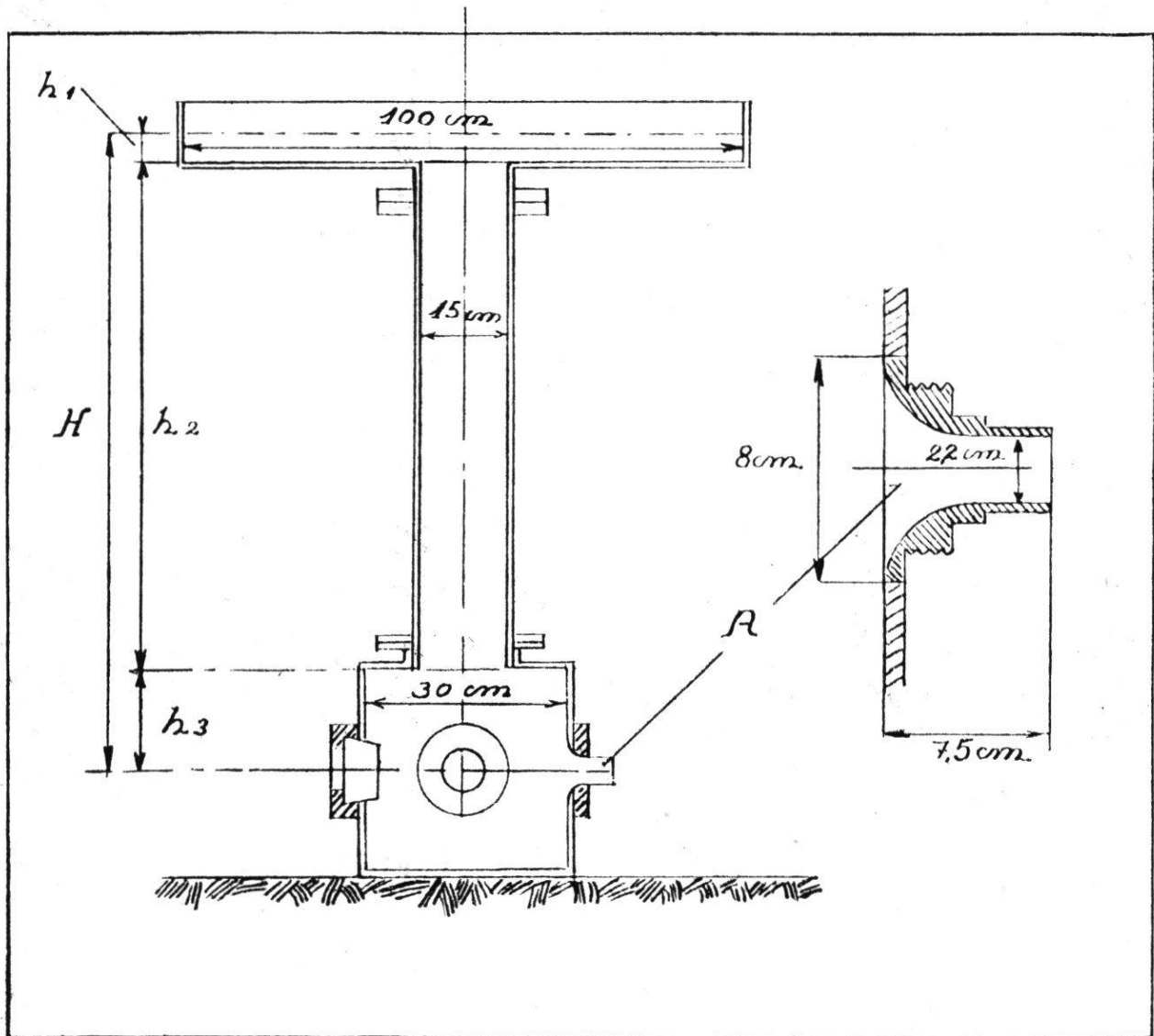


Abb. 3. Versuchsanordnung. A, stellt den Rohransatz in Form und Grösse dar.

Berechnet man nach Formel (7)  $t$  für  $v$  zwischen 0 und  $\psi \cdot v_0$ , so ergibt sich für eine Gesamtdruckhöhe  $H = 137$  cm folgende Tabelle I (vgl. Abb. 4 ausgezogene Kurve a).

$$Q_2 = \text{Querschnitt am Ende des Ausflussrohres} = \pi r^2 = \pi (1,1)^2 = 3,801 \text{ cm}^2$$

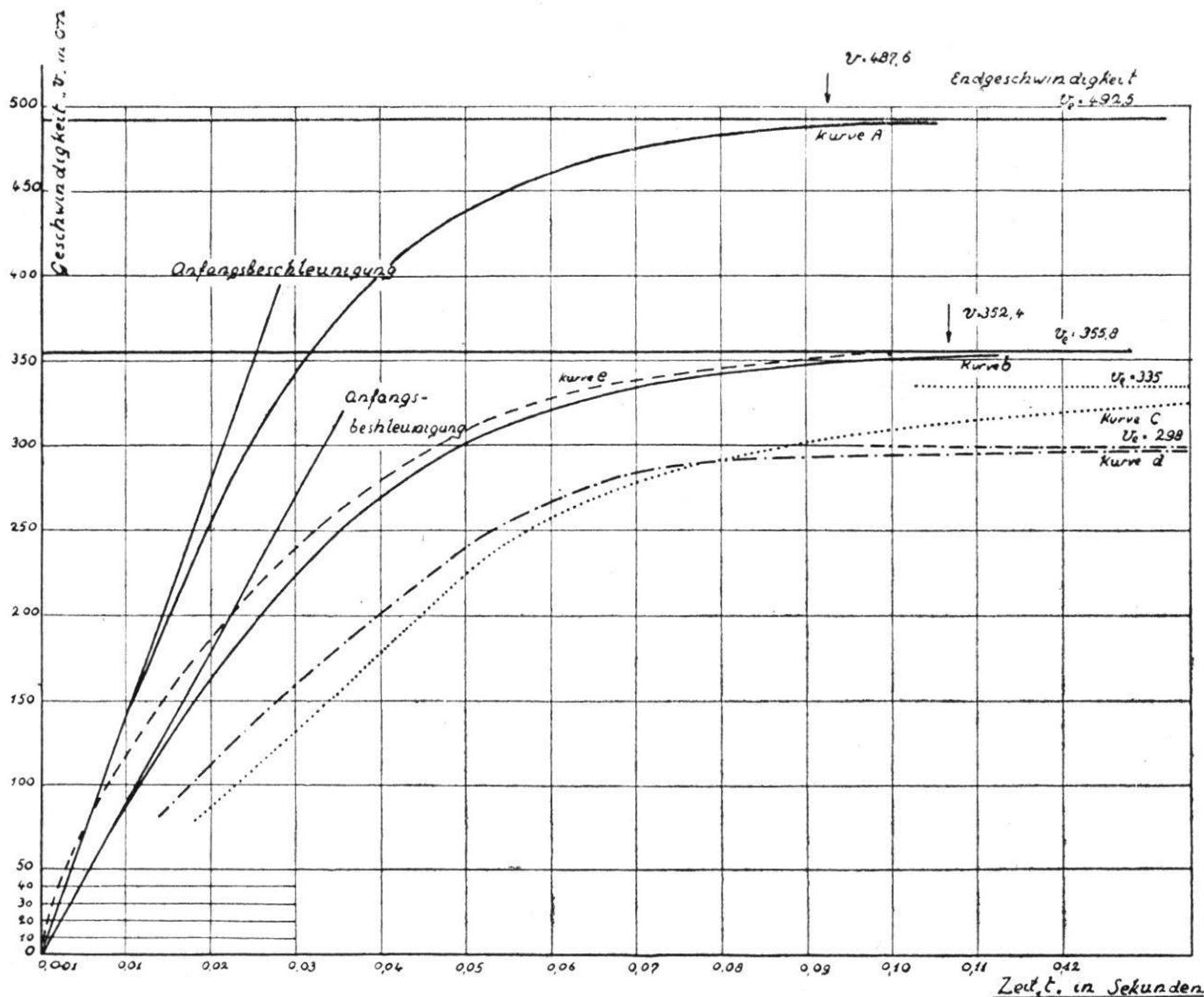


Abb. 4. Geschwindigkeitsverlauf während der Initialphase. Reservoir und Ansatzstück entsprechen der Abb. 3.

Kurve *a* stellt die nach Formel (7) berechneten in der Tabelle I gegebenen Werte dar. Die Druckhöhe  $H$  war = 137 cm. Die Endgeschwindigkeit  $v_e$  betrug unter Berücksichtigung des entsprechenden Ausflusskoeffizienten  $\psi$ ,  $v_e = \psi \sqrt{2 g H} = 0,95 \sqrt{2 g \cdot 137} = 492,5$  cm.

Kurve *b* stellt dasselbe bei einer Druckhöhe  $H = 70$  cm dar (vgl. Tab. II)  $v_e$  ist hier = 355,8 cm. Der Pfeil gibt den Zeitpunkt an, bei dem die Geschwindigkeit 99% der Endgeschwindigkeit erreicht hat.

Kurve *c* stellt die aus der Staudruckkurve gewonnene, also experimentell ermittelte, Geschwindigkeit dar. Die Versuchsbedingungen waren die gleichen wie bei Kurve *b*. Die Endgeschwindigkeit  $v_e$  betrug hier 335 cm, weil durch das Einführen der Manometerkanüle ein Strömungshindernis geschaffen wurde. Die Geschwindigkeit erreichte nach 0,107 Sekunden (Zeitpunkt bei dem theoretisch 99% der Endgeschwindigkeit erreicht werden sollte) nur 93% von  $v_e$ . Als Ursache wird eine unregelmässige Wirbelbildung an der Ausflussöffnung angenommen.

Kurve *d* gleicher Versuch wie Kurve *c*. Als Versuchsflüssigkeit diente aber Glycerin von der Dichte 1,19, die eine bereits stark visköse Flüssigkeit darstellt. Die Endgeschwindigkeit ist hier noch kleiner, weil sich die Reibung bemerkbar machte. Die Geschwindigkeit erreichte in der gegebenen Zeit 99% von  $v_e$ .

Kurve *e* gibt den Verlauf der Geschwindigkeiten, die mit der zweiten Methode als Mittelwert von vielen Versuchen erhalten wurden. Als Versuchsflüssigkeit wurde Wasser verwendet.

Tabelle I

Geschwindigkeit $v$ in cm	Zeit $t$ in Sek.
0	0
50	0,00357
100	0,00722
150	0,01111
200	0,01510
250	0,01961
300	0,02480
350	0,03114
400	0,03972
430	0,04717
450	0,05431
460	0,05919
470	0,06581
480	0,07630
487,6	0,09276
490	0,10470

Tabelle II

Geschwindigkeit $v$ in cm	Zeit $t$ in Sek.
0	0
50	0,00571
100	0,01166
130	0,01546
160	0,01955
190	0,02405
220	0,02915
250	0,03521
280	0,04291
300	0,04972
320	0,05925
330	0,06608
340	0,07618
350	0,09631
352,4	0,10670

$$N = \frac{h_1}{Q_1} + \frac{h_2}{Q_2} + \frac{h_3}{Q_3} + \int \frac{dl}{q} = \frac{5}{\pi (50)^2} + \frac{117}{\pi (7,5)^2} + \frac{15}{\pi (15)^2} + \int \frac{dl}{q}$$

$$= 0,0006 + 0,661 + 0,021 + 1,59 = 2,27$$

$\int \frac{dl}{q}$  ist nach einem Längsschnitte des Ansatzes berechnet

worden, indem passend gewählte Abschnitte von der Länge  $\Delta l$  durch den entsprechenden mittleren Querschnitt dividiert und die erhaltenen Werte summiert wurden. Für  $v = 50$  cm/Sek. ergibt sich beispielweise:

$$t = \frac{3,801 \times 2,27}{0,95 \sqrt{2g \cdot 137}} \times 2,303 \log \frac{0,95 \sqrt{2g \cdot 137} + 50}{0,95 \sqrt{2g \cdot 137} - 50} = 0,00357$$

Tabelle II (vgl. Kurve  $b$  der Abb. 4) gibt die Werte bei einer Gesamtdruckhöhe von  $H = 70$  cm  $N$  wird bei diesem Reservoir = 1,89

weil  $\frac{h_2}{Q_2} = 0,28$  ist. Ferner besitzt  $\psi$  den Wert 0,96. Für  $v = 50$  cm/Sek. ergibt sich demnach beispielweise:

$$l = \frac{3,801 \times 1,89 \times 2,303}{0,96 \sqrt{2g \times 70}} \log \frac{0,96 \sqrt{2g \times 70} + 50}{0,96 \sqrt{2g \times 70} - 50} = 0,00571$$

Die experimentelle Überprüfung der aus Formel (7) berechneten Werte bereitete gewisse Schwierigkeiten. Die kinematographische Erfassung des Ausflusstrahles würde eine Apparatur erfordern, die mehrere tausend Aufnahmen pro Sekunde gestattet, wenn der Ablauf hinreichend genau bestimmt werden soll. Aber auch so liesse sich aus der Form des Strahles die Geschwindigkeit nicht genau bestimmen, weil die Oberflächenspannung und die umgebende Luft bei veränderlicher Strömungsgeschwindigkeit sich verschieden auf die Bildung des Strahles auswirken.

Bei unseren Versuchen wurden zwei Methoden angewandt, die sich gewissermassen ergänzten. Bei der ersten Methode wurde die Geschwindigkeit mit dem Pitotrohr bestimmt. Die sehr dünnwandige Kanüle  $K_2$  zur Messung des Staudruckes besass einen Durchmesser von 0,1 cm. Sie war rechtwinklig gekrümmt und an der Durchlasstelle der Rohrwand mit derselben verlötet, sodass ihre Lage in der Röhrenachse fixiert blieb. Eine zweite gleichartige Kanüle  $K_1$  war in der Ebene der  $K_2$ -Mündung über einem passenden, polierten Bohrloche an die Rohrwand gelötet. Die Kanülen waren mit den entsprechenden Ansätzen des Brömser'schen Differentialmanometers verbunden, der auf der Abb. 5 skizziert ist. Dieses Manometer besitzt zwei Glasplattenmanometer mit optischer Transmission. Das unempfindlichere Manometer  $M_2$  diente zur Messung des statischen Wanddruckes. Seine Empfindlichkeit konnte durch passende Wahl der Glasplatte dem Versuche angepasst werden. Das empfindlichere Manometer  $M_1$  mit einer sehr dünnen Glasplatte ist im Gehäuse von  $M_2$  eingebaut, dessen Vorderwand zur Passage des auf  $M_1$  fallenden Lichtstrahles durch die Glasscheibe  $Gl$  abgeschlossen ist. Dieses Manometer  $M_1$  mass direkt die Differenz: Gesamtdruck — statischer Druck, also den sog.

Staudruck, der gleich  $\frac{\rho \cdot v^2}{2}$  ist. In Wirklichkeit wurde die Druck-

höhendifferenz gemessen, die dem Werte  $\frac{v^2}{2g}$  entspricht. Mit dieser Methode konnte sowohl die Änderung des Wanddruckes, als auch die Änderung der Geschwindigkeit gemessen werden. Das Zeitintervall zwischen dem Momente der plötzlichen Entfernung aus der Ruhelage und dem Erreichen der Gleichgewichtslage bei

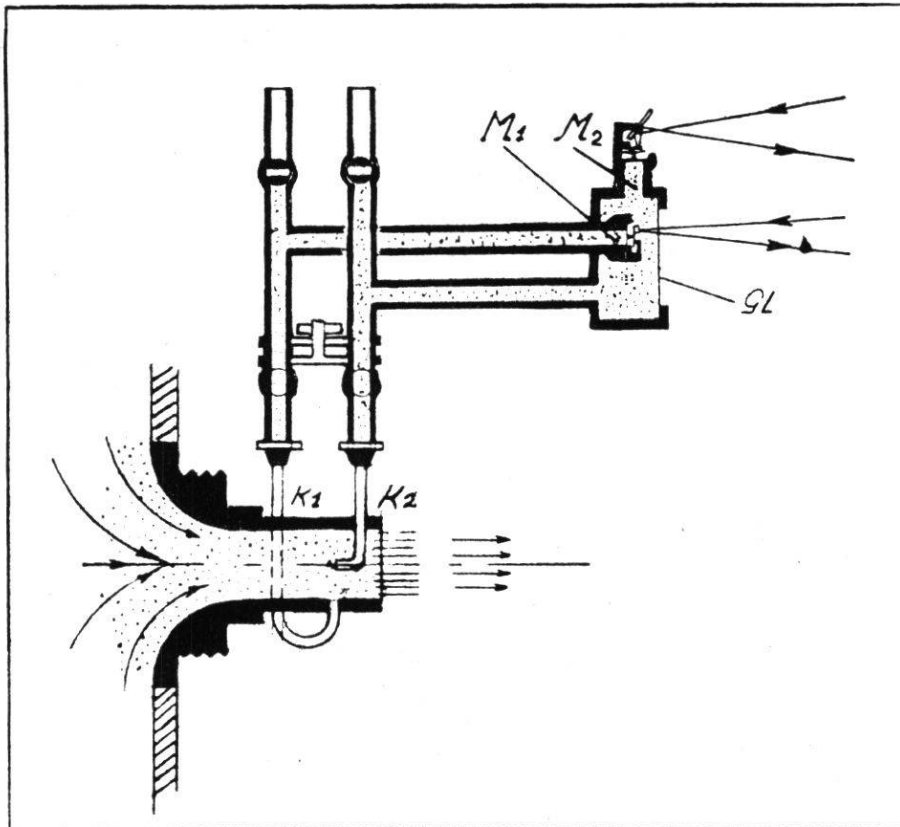


Abb. 5. Geschwindigkeitsmessung mit Hilfe des Pitotrohres unter Benützung eines Differentialmanometers.

strömender Flüssigkeit ergab die Dauer der Initialphase. Abb. 6a u. b zeigen derartige Druckregistrierungen. Bei beiden Versuchen handelt es sich um den Ausfluss durch das gleiche oben skizzierte Ansatzrohr aber mit verschiedener Flüssigkeit bei einer Druckhöhe von  $H = 70$  cm. Wie die Kurven zeigen ist sowohl der Verlauf der Initialphase als auch der weitere Verlauf etwas verschieden. Diese Erscheinung hängt damit zusammen, dass bei Glycerin dauernd Laminärströmung vorhanden war, während bei Wasser Umschläge in Turbulenz erfolgten. Die Unregelmässigkeit des weiteren Verlaufs der Druckkurven beruhen auf Wirbelbildungen an der Ausflussmündung. Die Unregelmässigkeit beim Strö-

mungsbeginn, die auf Abb. 6b besonders ausgeprägt ist, hängt mit der Öffnungsart des Rohrverschlusses zusammen. Auf der Abb. 4c sind die aus mehreren Versuchen mit Wasser gewonnenen

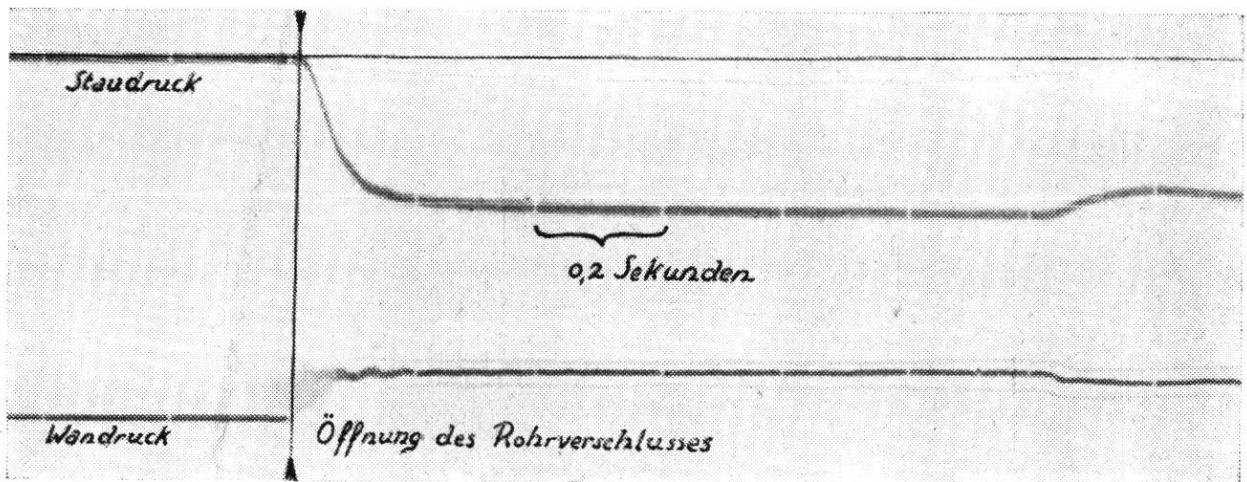


Abb. 6a. Verlauf des statischen Druckes und des Staudruckes. Als Versuchsflüssigkeit diente Wasser. Die Druckhöhe  $H$  betrug 70 cm. Beide Kurven zeigen Druckänderungen ausserhalb der Initialphase. Sie beruhten auf Wirbelbildungen an der Rohrmündung, die Aenderungen des Ausflusstrahles zur Folge hatten.

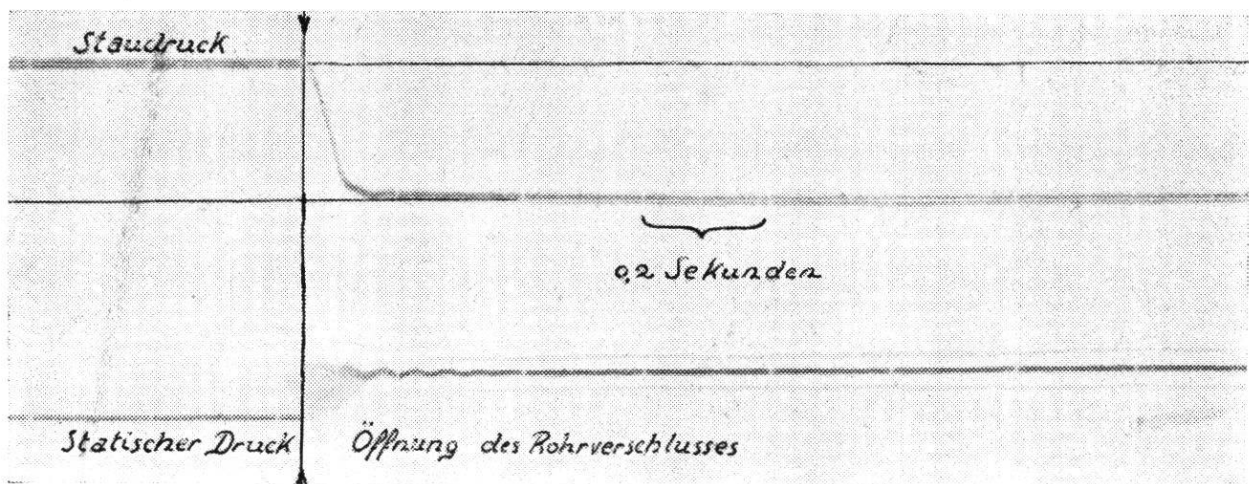


Abb. 6b. Gleicher Versuch wie Abb. 6a. Als Flüssigkeit wurde hier Glycerin mit der Dichte  $S = 1,19$  benützt. Die unregelmässigen Druckschwankungen ausserhalb der Initialphase sind verschwunden.

Geschwindigkeitswerte, die aus den Staudruckkurven ermittelt wurden, als punktierte, diejenigen mit Glycerin (vgl. Abb. 4d) als strichpunktierte Kurven aufgetragen. Wie daraus ersichtlich ist hat die Geschwindigkeit bei Wasser in der berechneten Zeit von 0,107 Sekunden (vgl. Tab. II) noch nicht 99% der Endgeschwindigkeit



erreicht, während dies bei Glycerin der Fall ist. Die Geschwindigkeitskurve bei Glycerin verläuft im ganzen Bereiche der Initialphase ähnlich wie die berechnete (Abb. 4 b), während für Wasser auch hier aus oben erwähnten Gründen eine deutliche Abweichung auftritt.

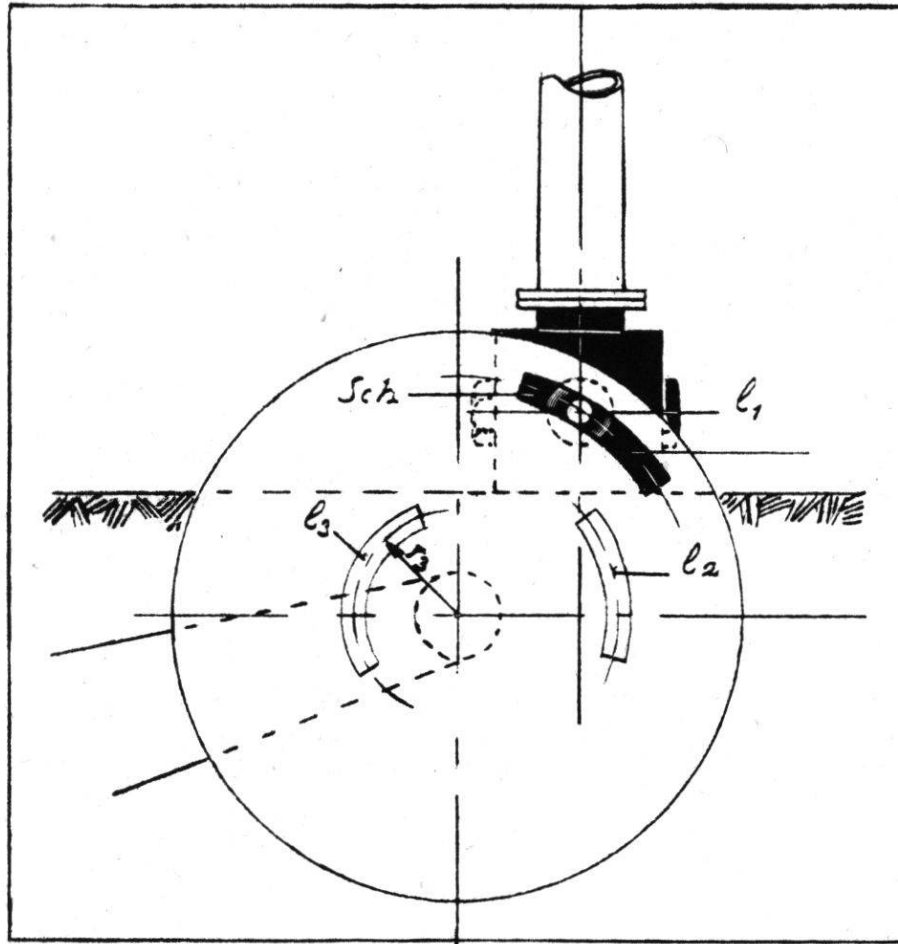


Abb. 7. Apparatur zur Bestimmung der Ausflussmengen bei zeitlich bestimmten Strömungsperioden.

Bei der zweiten Methode war das zeitliche Strömungsintervall  $\Delta t$  gegeben und es wurde das Ausflussquantum  $M$  gemessen resp. gewogen. Daraus konnte die mittlere Geschwindigkeit während  $\Delta t$

berechnet werden, sie war  $v = \frac{M}{\rho Q_2 \cdot \Delta t}$ . Die hierzu verwendete

Versuchsvorrichtung zeigt Abb. 7. Eine genau planebene Metallscheibe  $S$  mit einem Durchmesser von 100 cm besass mehrere Schlitze  $Sch$  mit den Längen  $l_1$ ,  $l_2$  und der Breite von 3 cm. Diese Scheibe wurde durch Motorantrieb mit konstanter Tourenzahl in eine konstante Winkelgeschwindigkeit versetzt, die durch entspre-

chende Transmissionen in gewissen Grenzen variiert werden konnte. Das Ausflussrohr *A* (vgl. Abb. 3) war so gelagert, dass seine Mitte den gleichen Abstand *r* von der Scheibenachse besass wie die Mittellinie des entsprechenden Schlitzes. Das Ansatzrohr hatte einen Abstand von ca. 2 mm von der Metallscheibe. Diese Spalte wurde durch ein durch Federdruck an die Scheibe angepresstes, dickwandiges Mantelrohr abgeschlossen. Damit konnte der Ausfluss nur dann erfolgen, wenn die Ansatzöffnung in den Bereich des Scheibenschlitzes zu liegen kam. Die Länge *l* des Schlitzes durfte nicht zu klein gewählt werden, weil sich Störungen durch die partielle Öffnung bzw. Schliessung bemerkbar machten. Die durch den Schlitz ausströmende Flüssigkeit wurde in einem nahe an die Scheibe gebrachten Sammelgefässe aufgefangen. Der eigentliche Versuch gestaltete sich folgendermassen: Das Reservoir wurde derart gelagert, dass das Ausflussrohr in den für den Versuch ausgewählten Schlitz *Sch* zu liegen kam. Das Ausflussrohr *A* war durch einen von aussen manipulierbaren Zapfen verschlossen und es wurde das Reservoir mit Flüssigkeit gefüllt. Darauf wurde die Scheibe in Drehung versetzt und deren Geschwindigkeit gemessen. Durch plötzliche Entfernung des Zapfens wurde die intermitierende Strömung eröffnet und die ausfliessende Menge resp. Masse *m* während einer bestimmten nicht zu kurzen Zeit (gewöhnlich einige Minuten) gemessen. Diese Masse *m* dividiert durch die Zahl der Umdrehungen während der gemessenen Zeit ergab *M*, die ausfliessende Masse

pro Strahl. Das Intervall  $\Delta t$  ergab sich aus der Proportion  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{l}{L}$ ,

wenn *T* die Dauer einer Periode, also einer Drehung um  $2\pi$ , und  $L = 2\pi r$  ist, wobei *r* den Abstand der Mittellinie des Schlitzes von der Drehachse bedeutet. War z. B. die Schlitzlänge  $l = 20$  cm,  $r = 45$  cm und die Tourenzahl 20 pro Sek., so war

$$\Delta t = \frac{l \cdot T}{L} = \frac{20 \times 0,05}{2\pi \cdot 45} = 0,00354 \text{ Sek.}$$

Damit waren alle Daten gegeben um die mittlere Geschwindigkeit *v* während der Ausflusszeit zu berechnen. Auf Abb. 4 sind diese Geschwindigkeiten für einen Flüssigkeitsstand von 70 cm Höhe eingetragen (vgl. gestrichelte Kurve *e*). Die Geschwindigkeiten

weichen am Anfange der Initialphase deutlich von der berechneten Geschwindigkeit ab (vgl. hiezu Tab. II), während sie gegen Ende gut übereinstimmen. Diese Abweichung beim Beginne der Strömung beruht wahrscheinlich darauf, dass bei grossen Winkelgeschwindigkeiten die Verschlusskappe nicht hinreichend abdichtete, sodass auch ausserhalb des Schlitzes die Flüssigkeitsströmung in gewisser Masse unterhalten blieb und bei der Öffnung des Ausflussrohres bereits eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit vorhanden war.

Als Gesamtergebnis aller Kontrollversuche, die mit verschiedenen kurzen Ansätzen ausgeführt wurden, ergab sich, dass die Formel 7 den Verlauf der Initialphase, soweit deren Prüfung experimentell möglich ist, richtig wiedergibt. Die Abweichungen der experimentellen von den berechneten Werten beruhen darauf, dass trotz Verwendung nur kurzer Ansatzrohre mit sorgfältig abgerundetem Mundstück Störungen sowohl durch Kontraktion der Flüssigkeit als auch infolge Reibung bemerkbar wurden. Nach Formel 7 ist demnach die Dauer der Initialphase proportional dem Ausfluss-Querschnitte mal der Grösse  $M$  und umgekehrt proportional der Endgeschwindigkeit. Setzt man in Formel (6)  $v = 0$  so

erhält man: 
$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2}{2 Q_2 N} = \frac{2 gh}{2 Q_2 N} = g \frac{h}{Q_2 \cdot N}.$$
 Diese An-

fangsbeschleunigung ist in der Abb. 4 eingetragen. Sie beträgt für die Kurve  $b$ : 8700 für  $a$ : 13 700. Würde  $N$  unendlich klein, so würde die Anfangsbeschleunigung unendlich gross. In Wirklichkeit kann  $N$  auch bei sehr weitem Behälter und kürzesten Ausflussrohr (der Dicke der Behälterwand) nie unendlich klein werden, weil sich im Innern des Gefässes ein Strömungskegel ausbildet.

### Reale Flüssigkeiten.

Erreicht das Ausflussrohr eine gewisse Länge, so macht sich die Reibung stärker geltend. Es stellt sich nun die Frage wie sich diese auf die Initialphase des Ausflusses auswirkt. Hiezu machen wir die Annahme, dass Poiseuille'sche Strömung während der ganzen Phase vorhanden ist. Bei dieser Strömung ist die Geschwindig-

keit an irgend einer Stelle des Rohrquerschnittes gegeben durch die

$$\text{Formel (a) } v = \frac{\Delta p}{4 \mu \cdot l} (R^2 - r^2) \dots (a)$$

wenn  $\Delta p$  die Druckdifferenz auf den Röhrenquerschnitt am Anfange und Ende der Röhre,  $\mu$  der Zähigkeitskoeffizient,  $l$  die Länge,  $R$  = der Radius der Röhre und  $r$  den Abstand des betrachteten Punktes von der Rohrachse bedeutet. Für die Röhrenachse, also  $r = 0$  wird Formel a

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4 \mu l} R^2$$

Diese maximale Geschwindigkeit  $v_{\max}$  ist doppelt so gross wie die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$ . Es ist deshalb:

$$\bar{v} = \frac{\Delta p}{8 \mu \cdot l} R^2 \dots\dots\dots (b)$$

Daraus ergibt sich: 
$$\Delta p = \frac{8 \mu l \cdot \bar{v}}{R^2}$$

oder da  $\pi R^2 = Q_2$  ist, 
$$\Delta p = \frac{8 \pi \cdot \mu \cdot l \cdot \bar{v}}{Q_2} \dots\dots\dots (9)$$

Diese Kraft muss bei der Aufstellung der Energiegleichung mitberücksichtigt werden. Die frühere Gleichung (4), welche die Arbeit der Oberflächenkräfte darstellt, geht über in:

$$A_2 = Q_1 \cdot dx_1 \cdot p_1 - Q_2 \cdot dx_2 (p_2 + \Delta p)$$

weil am Ende der Röhre die Reibungskraft  $-Q_2 \cdot \Delta p = -8 \pi \cdot \mu \cdot l \cdot \bar{v}$  der Strömung entgegengesetzt wirkt. Die Energiegleichung wird also:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho \cdot Q_2 \cdot dx_2 (1 - m^2) v^2 + \rho Q_2 N v \cdot dv = \rho Q_2 dx_2 g \cdot h \\ & + Q_2 dx_2 \left( p_1 - p_2 - \frac{8 \pi \mu \cdot l \cdot v}{Q_2} \right) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

wenn  $v = \bar{v}$  die mittlere Geschwindigkeit darstellt. Mit 2 multipliziert, durch  $\rho \cdot Q_2 dx_2$  dividiert und mit Berücksichtigung, dass  $dx_2 = v \cdot dl$  ist, ergibt sich analog (Formel 5):

$$(1 - m^2) v^2 + 2 Q_2 N \frac{dv}{dt} = 2 gh + \frac{2 (p_1 - p_2)}{\rho}$$

$$- \frac{16 \pi \cdot \mu \cdot l \cdot v}{\rho \cdot Q_2} \dots\dots (11)$$

Vernachlässigt man  $m^2$  gegenüber 1 und bezeichnet den Ausdruck  $\frac{8 \pi \mu \cdot l}{\rho \cdot Q_2}$ , der für den einzelnen Versuch konstant bleibt, mit  $\alpha$ . Setzt man ferner  $2 gh = v_0^2$ , so erhält man, wenn sowohl über  $Q_1$  wie  $Q_2$  Atmosphärendruck herrscht, also  $p_1 = p_2 = p_0$  wird:

$$v^2 + 2 Q_2 N \frac{dv}{dt} = v_0^2 - 2 \alpha v$$

oder  $2 Q_2 N \frac{dv}{dt} + (v + \alpha)^2 = v_0^2 + \alpha^2$

oder  $2 Q_2 N \frac{d(v + \alpha)}{dt} + (v + \alpha)^2 = v_0^2 + \alpha^2,$

die der Gleichung (6) entspricht, wenn  $v + \alpha = v$  und  $\sqrt{v_0^2 + \alpha^2} = v_0$  gesetzt wird.

Diese Gleichung integriert gibt:

$$\frac{Q_2 \cdot N}{\sqrt{v_0^2 + \alpha^2}} \ln \frac{\sqrt{v_0^2 + \alpha^2} + v + \alpha}{\sqrt{v_0^2 + \alpha^2} - v - \alpha} = t + C \dots\dots (12)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man

$$V_1 = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2} + \alpha \quad ; \quad V_2 = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2} - \alpha$$

setzen. Woraus  $\sqrt{v_0^2 + \alpha^2} = \frac{V_1 + V_2}{2}$  wird.

$V_1$  und  $V_2$  sind Konstanten. Damit geht Gleichung (12) über in:

$$\frac{2 Q_2 N}{V_1 + V_2} \ln \frac{V_1 + v}{V_2 - v} = t + C \dots\dots (13)$$

Für  $t = 0$ , ist  $v = 0$ . Also  $C = \frac{2 Q_2 N}{V_1 + V_2} \ln \frac{V_1}{V_2}$

Dieser Wert in Gleichung (13) eingesetzt gibt:

$$\frac{2 Q_2 N}{V_1 + V_2} \left( \ln \frac{V_1 + v}{V_2 - v} - \ln \frac{V_1}{V_2} \right) = t$$

und schliesslich

$$t = \frac{2 Q_2 \cdot N}{V_1 + V_2} \ln \frac{1 + \frac{v}{V_1}}{1 - \frac{v}{V_2}} \dots\dots (14)$$

als endgültige Lösung.  $v$  bedeutet die im Zeitpunkte  $t$  vorhandene Geschwindigkeit,  $v_0$  die Endgeschwindigkeit bei idealer Flüssig-

keit,  $Q_2$  den Röhrenquerschnitt,  $N$  das Integral  $\int \frac{dl}{Q}$

Gegen diese Ableitung sind gewisse Bedenken berechtigt. Nach Voraussetzung sollte vom Beginne der Strömung an bis zum Erreichen des stationären Zustandes Poiseuille'sche Strömung vorhanden sein. In Wirklichkeit besteht diese Strömung im stationären Zustande bei Reynold'schen Zahlen unter 1000 und ausserhalb der sog. Anlaufstrecke. Während der Initialphase ist zwar anfänglich immer Laminärströmung vorhanden, das Geschwindigkeitsprofil weicht aber stark vom Parabelprofil ab. Am Eingange des Ausflussrohres ist nämlich die Geschwindigkeitsverteilung annähernd gleichmässig d. h. die Geschwindigkeit ist an allen Stellen des Querschnittes annähernd gleich der mittleren Geschwindigkeit. Da die Reibung im Reservoir sehr klein ist, liegen am Anfange der Röhre die gleichen Verhältnisse vor, wie sie bei der früheren Ableitung für ideale Flüssigkeiten vorhanden waren. Am Ende der Röhre ist die Geschwindigkeit beim Beginne der Strömung ebenfalls annähernd gleichmässig über dem Querschnitt verteilt (sog. ebenes Geschwindigkeitsprofil). Im Verlaufe der Initialphase ändert aber dieses Profil dauernd, indem die Geschwindigkeit an der Rohrwand = 0 bleibt, während in der mittleren Zone des Rohrquerschnittes die Geschwindigkeit über die mittlere Geschwindigkeit hinauswächst bis das Profil seinen stationären Zustand für Laminärströmungen im Parabelform erreicht hat, wenn die Rohrlänge grösser als die An-

laufstrecke ist <sup>1</sup>. Im Bereiche der Anlaufstrecke besitzt das Geschwindigkeitsprofil auch im stationären Zustande eine Form, die zwischen dem ebenen und dem parabolischen Profile liegt. Durch diese örtliche und zeitliche Änderung der Geschwindigkeitsverteilung im Verlaufe des Ausflussrohres und während der Initialphase, tritt gleichzeitig auch eine Änderung der kinetischen Energie und der Reibung auf. Während die kinetische Energie des Durchflusses bei Parabelprofil gerade doppelt so gross ist wie diejenige bei ebenem Profile, besitzt die Reibung beim Parabelprofile ihren kleinsten Wert. Bei der Aufstellung der Energiegleichung müsste demnach der jeweilige Strömungszustand berücksichtigt werden, was nur durch Annäherungsverfahren möglich wäre und zu sehr komplizierten Rechnungen führen würde. Trotz dieser Einwände gibt Formel 14 bei Berücksichtigung gewisser Faktoren Werte, die mit den experimentellen Ergebnissen für praktische Bedürfnisse hinreichend übereinstimmen, wie folgende Beispiele zeigen.

An das Ansatzstück des Reservoirs der Abb 3 war eine gleichmässige, zylindrische Stahlröhre von der Länge  $l = 505,2$  cm und dem Durchmesser  $2r = 2,2$  cm angesetzt. Die Gesamtdruckhöhe  $H$  betrug 137 cm. Als Versuchsflüssigkeit wurde Glycerin von der Dichte  $\rho = 1,211$  und der Zähigkeit  $\mu = 0,7472$  bei 16,5 C benützt.

Die Reynold'sche Zahl  $Z = \frac{\rho \cdot r \cdot v}{\mu}$  betrug hier 115.  $Q_2 =$  Querschnitt der Ausflussröhre war  $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,1)^2 = 3,801$ .

$N$  betrug für dieses Reservoir mit Ansatz nach früheren Berechnungen 2,27. Dazu ist für die angesetzte Röhre  $\frac{l}{Q_2} = 132,91$  zu addieren.  $N$  war demnach  $= 135,18$ .

$$a = \frac{8 \pi \cdot \mu \cdot l}{\rho \cdot Q_2} = \frac{8 \pi \times 0,7472 \times 505,2}{1,211 \times 3,801} = 2061,1$$

$$a^2 = 4247700$$

$$v_0^2 = 2g \cdot H = 2 \times 981 \times 137 = 268800$$

$$v_0 = 518 \text{ cm.}$$

<sup>1</sup>Vgl. hierzu: MÜLLER ALOYS, *Abh. z. Mech. d. Flüssigkeiten*. Bd. I, 1936.

Dieser Torricelli'schen Ausflussgeschwindigkeit entspricht hier infolge des Druckverlustes durch Reibung in der Ausflussröhre die Geschwindigkeit

$$V_2 = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2} - \alpha = \sqrt{268\,800 + 4\,247\,700} - \alpha \\ = 2125,2 - 2061,1 = 64,1 \text{ cm.}$$

*Anmerkung:* In Wirklichkeit war die Ausflussgeschwindigkeit = 63,15 cm. Dies hängt damit zusammen, dass weder die Änderung des Strömungsprofils in der Ausflussröhre noch der Ausflusskoeffizient berücksichtigt wurde.  $V_2$  entspricht nämlich der Ausflussgeschwindigkeit im stabilen Zustande. Bei der Aufstellung der Gleichung wurde aber diese Grösse =

$$\sqrt{2 g \cdot h} \text{ gesetzt. Die Geschwindigkeitshöhe war also } h = \frac{V_2^2}{2 g} = \frac{(64,1)^2}{2 \cdot 981}$$

= 2,10 cm. Bei parabolischem Profile ist die Geschwindigkeitshöhe aber

$$h' = \frac{V_2^2}{g}. \text{ Berücksichtigt man ferner die vermehrte Reibung in der An-}$$

laufstrecke und den Ausflusskoeffizienten so wird die Geschwindigkeitshöhe

$$h'' = \frac{1,15 V_2^2}{g} = 4,85. \text{ Die Druckhöhe zur Überwindung der Reibung be-}$$

trägt demnach statt  $137,0 - 2,10 = 134,9$  cm, wie bei der Berechnung angenommen wurde,  $137,0 - 4,85 = 132,15$  cm. Sie ist also rund 2% kleiner, was, in Übereinstimmung mit dem obigen experimentellen Werte, eine Verkleinerung der Ausflussgeschwindigkeit von 2% zur Folge hat.

$$V_1 = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2} + \alpha = 2125,2 + 2061,1 = 4186,3$$

Bestimmt man  $t$  nach Formel (14) für eine Geschwindigkeit  $v$ , die 1% kleiner ist als die Ausflussgeschwindigkeit im stationären

Zustande also  $v = \frac{99 \times V_2}{100} = 63,46$  cm/sec., so ergibt sich:

$$t = \frac{2 \times 3,801 \times 135,18}{4186,3 + 64,1} \times 2,303 \quad \log \frac{1 + \frac{63,46}{4186,3}}{1 - \frac{63,46}{64,1}} = 1,117 \text{ Sek.}$$

Das experimentelle Resultat zeigt Abb. 8. Die Initialphase dauerte 1,105 Sek. Das Differentialmanometer war 250 cm hinter



dem Rohransatze, also im Bereiche der Poiseuille'schen Strömung eingesetzt. (Die Anlaufstrecke betrug hier ca. 30 cm.) Die obere Linie gibt den Wanddruck in der Röhre, die untere den Staudruck.

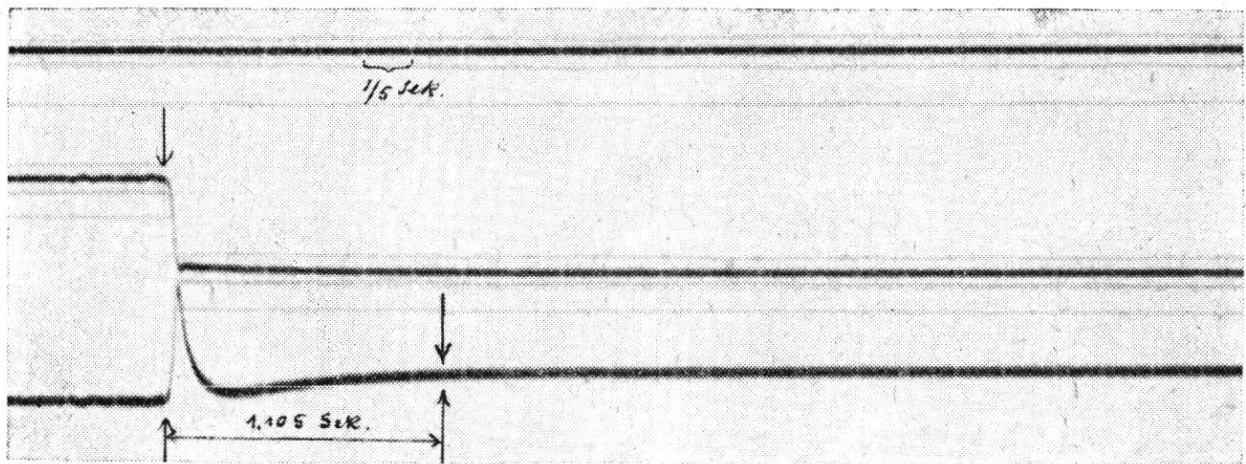


Abb. 8. Experimentelle Bestimmung der Dauer der Initialphase  $t$  aus der Staudruckkurve.  $H = 137$  cm.  $\mu = 0,7472$ ,  $\zeta = 1,211$ , Temperatur =  $16,5^\circ$ ,  $l = 505,2$  cm.,  $r = 1,10$  cm.,  $v = 63,15$  cm.  $t = 1,105$  Sek.

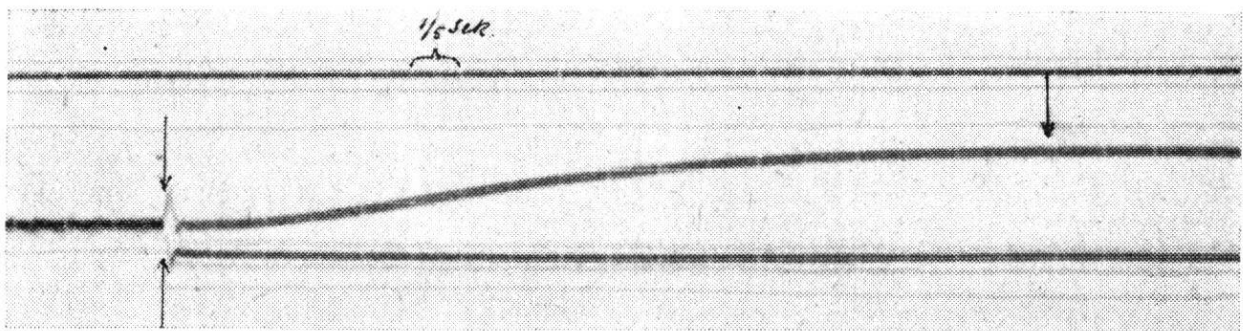


Abb. 9. Experimentelle Bestimmung der Initialphase wie bei Abb. 8  $H = 69,5$ ,  $\mu = 0,1954$ ,  $\rho = 1,1632$ , Temp. =  $15,0^\circ$ ,  $l = 505,2$  cm.,  $r = 1,1$  cm.  $v = 101,7$  cm.,  $t = 3,5$  Sek.

Die Pfeile bezeichnen den Beginn und das Ende der Initialphase. Die beim Beginn auftretende, kurze Zeit dauernde Staudruckzacke hängt mit der Druckwelle zusammen, die beim plötzlichen Öffnen der Röhre am Ende derselben entstand. Diese Welle pflanzte sich nach dem Reservoir zu fort und verursachte eine Beschleunigung der Flüssigkeit.

Abb. 9 gibt ein Versuchsergebnis mit der gleichen Röhre bei einer Gesamtdruckhöhe  $H = 69,5$  cm. Als Versuchsflüssigkeit diente Glycerin von der Dichte  $\rho = 1,1632$  und der Viskosität  $\mu = 0,1954$ . Die Ausflussgeschwindigkeit im stationären Zustande

war  $v = 101,7$  cm. Die Reynold'sche Zahl  $Z$  war 668. Die Bestimmung der Dauer der Initialphase ergab 3,5 Sek. als Mittelwert aus 15 Einzelversuchen. Die Streuung betrug einige Prozente, die hauptsächlich durch die nicht ganz sichere Bestimmung des Endes der Initialphase bestimmt wurde. Zur Berechnung der Dauer der Initialphase nach Formel 14 ist:

$$Q_2 = 3,801 ; \quad N = 133,75 ; \quad \alpha = 561,1 ; \quad \alpha^2 = 314\,840$$

$$v_0^2 = 2 \times 981 \times 69,5 = 136\,360 ; \quad v_0 = 369,3 \text{ cm} ; \quad \sqrt{v_0^2 + \alpha^2} = 671,7$$

$$V_1 = 1232,8 ; \quad V_2 = 110,6 \text{ zu setzen.}$$

Daraus ergibt sich:

$$t = \frac{2 \times 3,801 \times 133,75 \times 2,303}{1343,4} \log \frac{1 + \frac{109,5}{1232,8}}{1 - \frac{109,5}{110,6}} = 3,55 \text{ Sek.}$$

In diesem Beispiele war die berechnete stationäre Ausflussgeschwindigkeit  $V_2$  merklich verschieden von der experimentell bestimmten  $v$ . Der Unterschied betrug 8%. Dieser Unterschied beruht wieder darauf, dass bei

der Berechnung die Geschwindigkeitshöhe  $h = \frac{v^2}{2g} = 5,27$  statt  $\frac{1,15 v^2}{g} =$

12,12 eingesetzt wurde, woraus eine Druckhöhendifferenz von 6,75 cm resultierte, die in Wirklichkeit zur angenommenen Geschwindigkeitshöhe addiert werden müsste.

Tabelle III und Abb. 10 geben die aus der Formel (14) berechneten Zeiten  $t$  als Funktion der Geschwindigkeit  $v$  (ausgezogene Linie) und die aus der Staudruckkurve der Abb. 9 erhaltenen Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit (gestrichelte Kurve).

Letztere wurden auf die stationäre Ausflussgeschwindigkeit von 110,0 cm korrigiert. Da die Kanüle zur Geschwindigkeitsmessung in der Rohrachse lag, entsprechen die Geschwindigkeiten nicht der mittleren sondern der maximalen Geschwindigkeit. Wäre das Profil von Anfang an parabolisch, dann müssten sich die beiden Kurven decken, weil die mittlere Geschwindigkeit gleich der Hälfte der Achsengeschwindigkeit, die hier gemessen wurde, beträgt.

*Tabelle III*

Geschwindigkeit $v$ in cm	Berechn. Zeit $t$ in Sek.	Zeit $t$ in Sek.	Experimentell erm. Geschwindigk. $v$ in cm
0	0	0	0
10	0,077	0,4	53,0
20	0,16	0,6	87,0
30	0,25	0,8	113,5
40	0,36	1,2	150,0
50	0,48	1,6	177,5
60	0,63	2,0	195,5
70	0,81	2,4	207,0
80	1,03	2,8	213,5
90	1,35	3,2	216,0
100	1,88		
105	2,41	4,0	218,0
107	2,80		
108,9	3,55		

Wahrscheinlich beruht die Abweichung der berechneten von der gemessenen Geschwindigkeit während der Initialphase darauf, dass das Strömungsprofil während der Initialphase allmählich vom ebenen in das parabolische Profil übergeht. Der strenge Beweis hierfür müsste allerdings mit andern Methoden erbracht werden. Die im ersten Abschnitt erwähnte Methode der Differenzbestimmung der in bestimmten Zeitintervallen ausfließenden Flüssigkeitsmengen konnte aus verschiedenen technischen Gründen in dieser Form nicht verwendet werden. Wir werden bei späteren Versuchen darauf zurückkommen. Bei den verwendeten Glasplattenmanometern ist die Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Deformationsgeschwindigkeit zu berücksichtigen.

Die Gesamtdauer der Initialphase wurde hingegen an sehr vielen Versuchen, die mit Stahlröhren, deren Durchmesser zwischen 1,0 und 2,2 cm und deren Längen zwischen 50 und 500 cm variierten mit verschiedenen Flüssigkeiten bestimmt und mit den berech-

neten Werten verglichen, wobei die Initialphase nach Erreichen von 99% der theoretisch geforderten, stabilen Ausflussgeschwin-

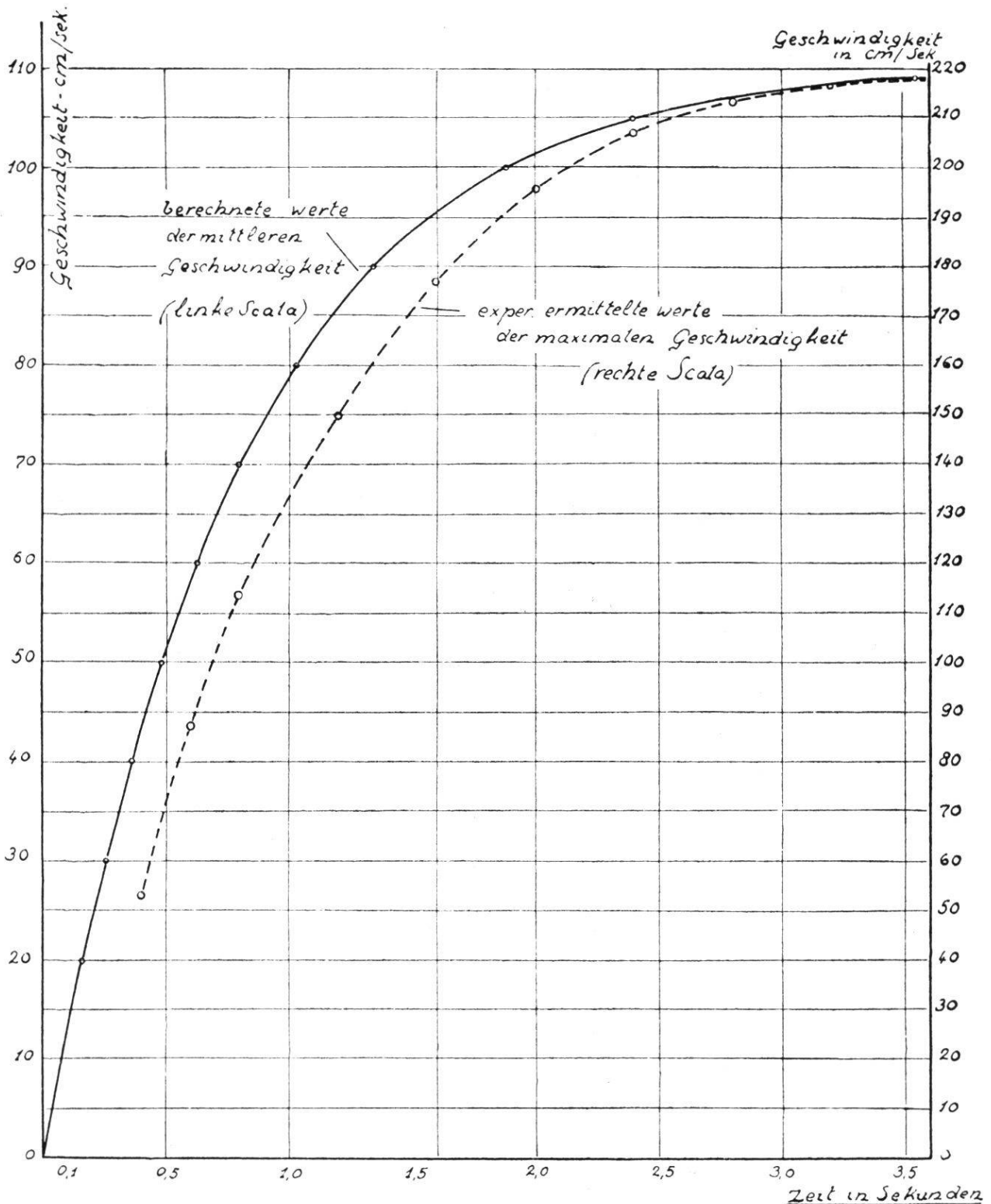


Abb. 10.

digkeit als beendet betrachtet wurde. Es zeigte sich, dass bei Strömungen mit Reynold'schen Zahlen bis zu 700 die Werte bis auf einige Prozent übereinstimmten. Die Abweichungen lagen gewöhn-

lich im Bereiche der Ablesefehler. Bei asymptotischem Verlauf der Kurven hereitet die Bestimmung des Grenzwertes immer gewisse Schwierigkeiten.

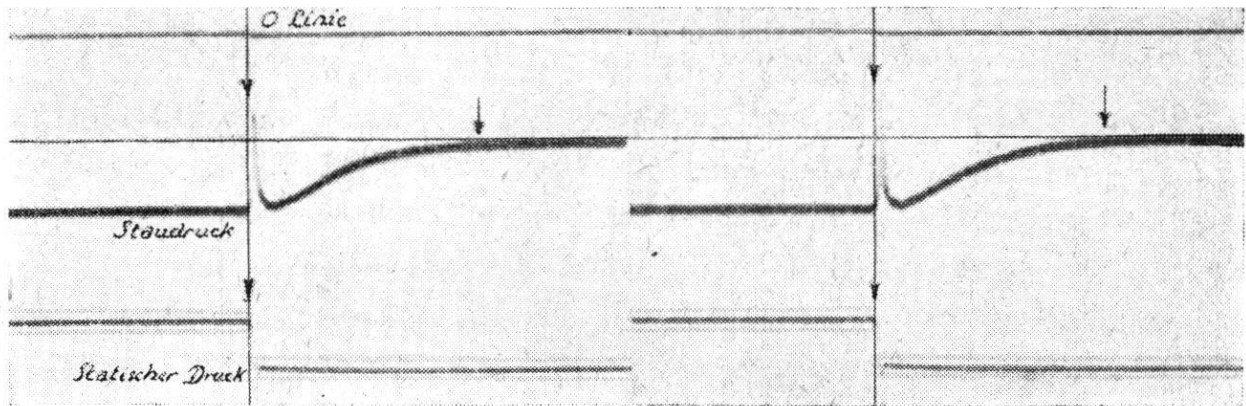


Abb. 11. Beliebige ausgewählte Kurven aus einer Serie von 20 Versuchen mit einer Stahlröhre von 276 cm. Länge und 1,6 cm. Durchmesser. Das Mündungsstück war trompetenförmig gebaut. Die Druckkurven wurden in einem Abstände von 130 cm. vom Röhrenanfang ab aufgenommen. Die Öffnung des Rohres geschah durch plötzliches Entfernen des zum Verschlusse benützten Fingers. Die Druckhöhe schwankte zwischen 136 und 138 cm., die Temperatur zwischen 13,5 und 14,5° C.

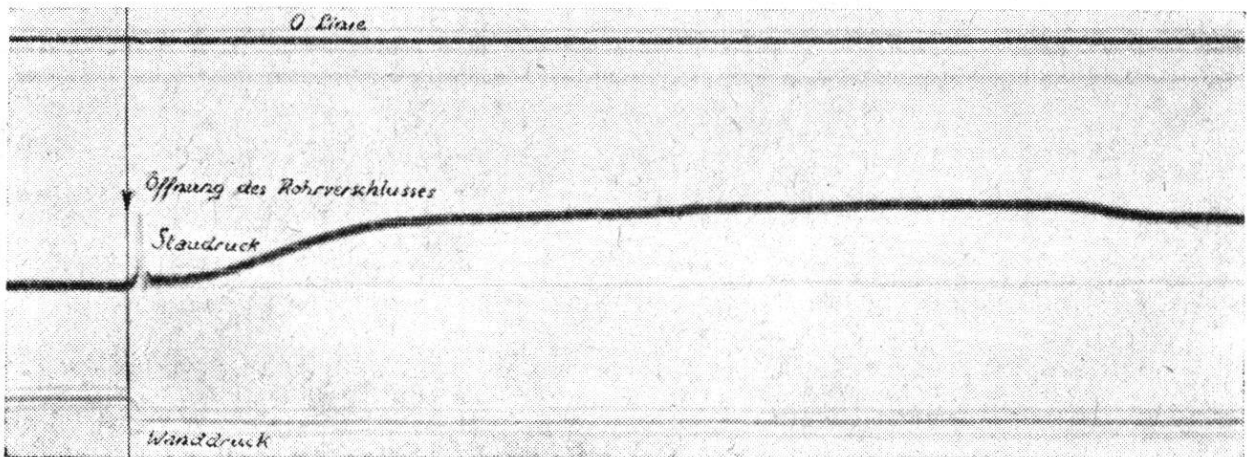


Abb. 12. Druckkurven bei einer Strömung mit der Reynold'schen Zahl  $Z = 1260$  (Uebergangsform). Die Staudruckkurve zeigt, dass Laminärströmung vorhanden ist, eine Gleichgewichtslage aber nicht erreicht wird.

Abb 11 gibt 2 Kurven aus einer Reihe von 20 Versuchen mit einer Stahlröhre von 1,6 cm Durchmesser und 276 cm Länge. Die Versuchsflüssigkeit war Glycerin mit der Dichte  $\rho = 1,1897$  und der Zähigkeit  $\mu = 0,3818$  bei 14° C. Die mittlere Druckhöhe  $H$  im Reservoir betrug 137 cm.  $N$  war 145,5. Die Kurven sind quasi identisch. Gelegentlich waren die Anfangszacken, die durch die

Öffnungsart bestimmt wurden, etwas verschieden, was auch auf diesen Kurven erkenntlich ist. Wie hier deutlich ersichtlich war die Bestimmung des Endes der Initialphase zwar nicht präzis aber

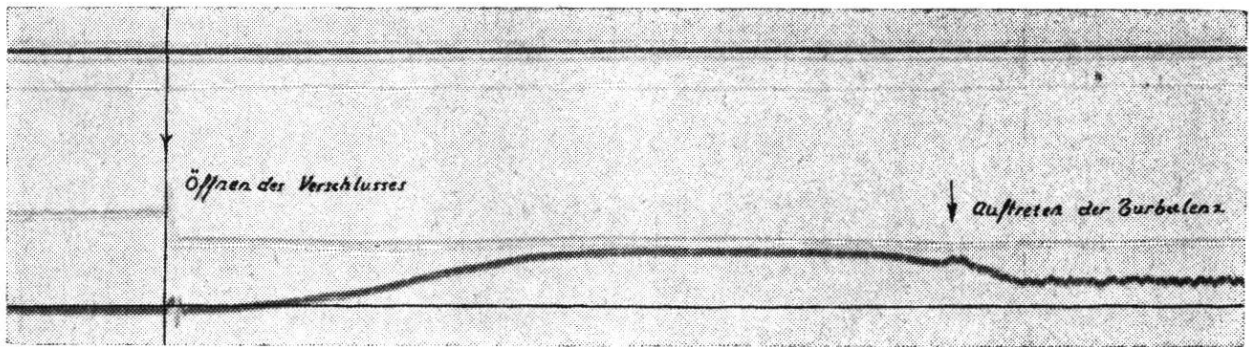


Abb. 13. Druckkurven bei einer Strömung mit der Reynold'schen Zahl  $Z \approx 1900$ .

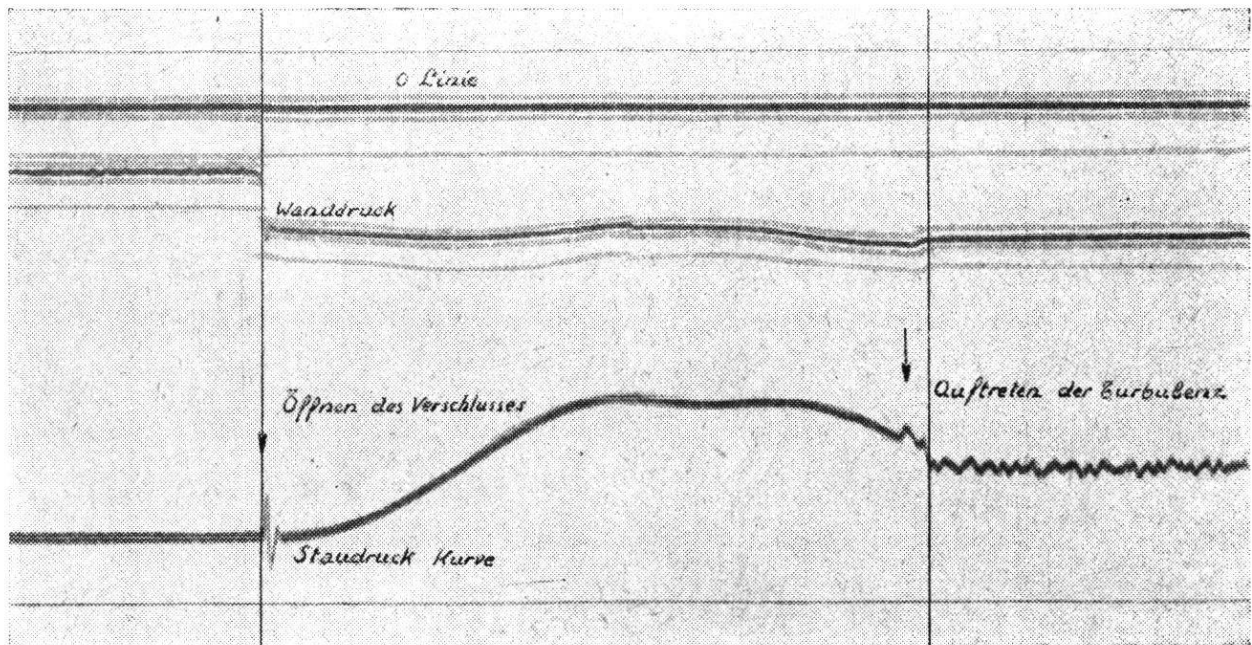


Abb. 14 Druckkurven bei einer Strömung mit der Reynold'schen Zahl  $Z \approx 2000$ .

für unsere Zwecke hinreichend genau. Der mittlere experimentelle Wert betrug 1,15 Sek. während die Berechnung 1,12 Sek. ergab.

Bei Strömungen mit Reynold'schen Zahlen über 700 gibt die Formel (14) weniger genaue Werte. Bei Zahlen zwischen 1100 und 2000 sind die Werte experimentell nicht bestimmbar, weil sich kein Gleichgewichtszustand herstellt. Es handelt sich hier um die sogen. uninstabile Übergangsform. Abb. 12 gibt die Initialphase bei einer Strömung mit  $Z = 1270$ . Wie aus der Staudruckkurve ersichtlich ist Laminärströmung vorhanden, die Geschwindigkeit bleibt aber

unstabil. Abb. 13 und Abb. 14 zeigen die entsprechenden Druckkurven bei Strömungen mit Reynold'schen Zahlen zwischen 1900 und 2000. Bei der einen erhält sich die Laminärströmung während ca. 4,4 Sek. bei der andern ca. 3,0 Sek., um darauf in turbulente Strömung überzugehen, die an der Unregelmässigkeit der Staudruckkurven ohne weiteres erkenntlich ist.

Bei Reynold'schen Zahlen über 5000 bei abgerundeter Mündung oder bei Zahlen über 2000 bei gerader Rohrmündungsform ist die Dauer der Initialphase experimentell wieder leicht bestimmbar. Sie bleibt bei gleichen Versuchsbedingungen annähernd konstant und ist wesentlich kürzer als die nach Formel (14) berechnete. Der Grund hiefür liegt darin, dass im Beginne der Strömung immer Laminärströmung vorhanden ist, die bei einer bestimmten Geschwindigkeit in turbulente Strömung umschlägt. Da diese stabil bleibt, wird die Endgeschwindigkeit rascher erreicht als dies bei Erhalten der Laminärströmung der Fall wäre.

Als Ergebnis dieser Untersuchungen folgt, dass bei zeitlich unterbrochenen Strömungen mit Strömungszeiten, die gleicher Grössenordnung sind wie die Initialphasen, der Durchfluss abhängig ist vom Querschnitte der Ausflussröhre und dem Integral  $N$  einerseits und der Druckhöhe und Reibung andererseits. Ist bei einem gegebenen Leitungssystem  $N$  sehr gross, so wird trotz Anwendung hoher Überdrucke der Durchfluss bei kurzen Öffnungszeiten sehr klein bleiben.

In unserem Kreislauf ist nun tatsächlich  $N$  und die Reibung relativ gross, während die Öffnungsdauer relativ kurz bleibt. Um eine hinreichende Blutmenge in Zirkulation zu bringen müsste ein sehr hoher Überdruck aufgewendet werden, der spezielle Anforderungen an den druckerzeugenden Apparat stellen müsste. Durch einen genialen Kunstgriff weicht der lebende Organismus dieser Schwierigkeit aus, indem er sein Leitungssystem dehnbar gestaltet. Damit wird für die Dauer der Öffnungsperiode sowohl  $N$  wie auch die Reibung auf ein Minimum herabgesetzt, sodass bei einem bescheidenen Überdrucke ein grösst mögliches Ausflussquantum erreicht wird. Darauf hinzuweisen war der eigentliche Zweck dieser Arbeit.