Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 77 (1988)

Heft: 1-2

Artikel: Bemerkungen zur schwingenden Saite und ihrer Simulation

Autor: Kaup, Burchard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-308676

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bemerkungen zur schwingenden Saite und ihrer Simulation

von BURCHARD KAUP,
Mathematisches Institut der Universität,
CH-1700 Fribourg

Dieser Text enthält Auszüge und Ergänzungen zum Vortrag "Die schwingende Saite aus musikalischer, physikalischer und mathematischer Sicht" und soll in möglichst einfacher Form den Zugang zu einigen Resultaten (vgl. z. B. CANNON und HELMHOLTZ) erleichtern und den Leser zu eigenen Experimenten anregen: es wird gezeigt, wie man durch die Wahl geeigneter Anfangsbedingungen verschiedene Schwingungen der Schwingenden Saite auf einem Computer simulieren kann und wie man durch Berechnen der zugehörigen Fourierzerlegung Informationen über die Klangfarbe des entsprechenden Tons erhalten kann.

1. Schwingende Kugeln

Gegeben sei in der x-y-Ebene ein Gummiband der Länge L, auf dem $N+1$ Kugeln der Masse μ angebracht sind. Der Abstand der Kugeln sei stets $\delta := L/N$, die Kugeln befinden sich in den Punkten $(x_n, 0)$ mit $x_n := n\delta$ für $n = 0, 1, \ldots, N$. Wir nehmen an, dass das Gummiband kleine Schwingungen ausführt (dabei vernachlässigen wir die Erdanziehung und Reibung); die zwei Kugeln an den Enden des Gummibandes seien fixiert. Ferner nehmen wir an, dass bei den Schwingungen die x-Koordinaten aller Kugeln konstant bleiben. Es sei τ eine Zeiteinheit, über die wir später noch verfügen werden. Mit t_k bezeichnen wir den Zeitpunkt $t_k := k\tau$. Es sei $u(x_n, t)$ die Auslenkung der n-ten Kugel zur Zeit t und

$$u_{n,k} \;:=\; u(x_n, t_k) = \text{Auslenkung der } n\text{-ten Kugel zur Zeit } t_k.$$

Wir machen folgende Annahme: die Kraft, welche eine Kugel durch die Spannung des Gummibandes auf ihre Nachbarkugel ausübt, ist von der Form $\pm\sigma \tan\alpha$, wobei α der Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Kugeln und der x-Achse ist und σ eine Konstante (welche die Spannung des Gummibandes enthält); eine Begründung für diese Annahme findet man im unten angegebenen Buch von FLETCHER, Seite 123. Zur Zeit t_k üben die $(n-1)$-te und die $(n+1)$-te Kugel auf die n-te Kugel also die Kraft

$$\text{Kraft} \quad = \quad \sigma \frac{u_{n-1,k} - 2u_{n,k} + u_{n+1,k}}{\delta}$$

aus.

Allgemein gilt für die zweite Ableitung einer Funktion f:

$$(L) \qquad f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

(das ergibt sich leicht daraus, dass für kleine h gilt: $f''(a) \approx [f'(a+h/2) - f'(a-h/2)]/h$, $f'(a+h/2) \approx [f(a+h) - f(a)]/h$, $f'(a-h/2) \approx [f(a) - f(a-h)]/h$). Insbesondere ergibt sich, dass die mittlere Beschleunigung der n-ten Kugel zur Zeit t_k gegeben wird durch

$$\frac{u(x_n, t_k - \tau) - 2u(x_n, t_k) + u(x_n, t_k + \tau)}{\tau^2} = \frac{u_{n,k-1} - 2u_{n,k} + u_{n,k+1}}{\tau^2}.$$

Nach NEWTON (Kraft = Masse × Beschleunigung) gilt also angenähert

$$\sigma \frac{u_{n-1,k} - 2u_{n,k} + u_{n+1,k}}{\delta} = \mu \frac{u_{n,k-1} - 2u_{n,k} + u_{n,k+1}}{\tau^2}.$$

Setzen wir noch $\varrho := \mu/\delta$, dann ergibt sich daraus

$$(*) \qquad \sigma \frac{u_{n-1,k} - 2u_{n,k} + u_{n+1,k}}{\delta^2} = \varrho \frac{u_{n,k-1} - 2u_{n,k} + u_{n,k+1}}{\tau^2}.$$

Wählen wir als Zeiteinheit $\tau := \delta\sqrt{\varrho/\sigma}$, dann erhalten wir daraus

$$u_{n-1,k} + u_{n+1,k} = u_{n,k-1} + u_{n,k+1} \qquad (0 < n < N \text{ und } k > 0).$$

Da die zwei Kugeln am Ende des Gummibandes sich nicht bewegen, erhalten wir also für kleine Schwingungen die Gleichungen

$$(**) \qquad \begin{aligned} u_{n,k+1} &= u_{n-1,k} + u_{n+1,k} - u_{n,k-1} && (0 < n < N \text{ und } k > 0) \\ u_{0,k} &= u_{N,k} = 0 && (k \geq 0). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man in eindeutiger Weise alle $u_{n,k}$ berechnen, wenn die Werte von $u_{n,k}$ gegeben sind für $0 < n < N$ und $k = 0, k = 1$. Man beachte, dass diese sog. Anfangswerte ganz beliebig vorgegeben werden dürfen.

Im vierten Abschnitt findet man Beispiele, wie man durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen verschiedene Schwingungen auf einem Computer simulieren kann.

2. Übergang zur schwingenden Saite

Wir betrachten jetzt eine Saite der Länge L, die in den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist und kleine Schwingungen ausführt. Es sei σ die Spannung

und ϱ die Dichte der Saite, es sei $u(x,t)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t.

Wir denken uns die Saite in $N+1$ Teile zerschnitten: das erste und das letzte Teil haben die Länge $\frac{L}{2N}$, alle anderen Teile haben die Länge $\frac{L}{N} =: \delta$ und die Masse $\mu = \varrho\delta$. Wir ersetzen jetzt jedes der Teile durch eine Kugel der Masse μ und denken uns die Kugeln durch ein Gummiband der Spannung σ verbunden: damit erhalten wir für grosses N eine gute Approximation der gegebenen Saite. Da die Bewegungen des Gummibandes mit den Kugeln durch die Gleichung $(*)$ beschrieben wird, erhält man die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite aus $(*)$ durch den Grenzübergang $N \to \infty$. Wegen (L) gilt

$$\frac{u(x-\delta,t) - 2u(x,t) + u(x+\delta,t)}{\delta^2} \xrightarrow{\delta\to 0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\frac{u(x,t-\tau) - 2u(x,t) + u(x,t+\tau)}{\tau^2} \xrightarrow{\tau\to 0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

Aus $(*)$ ergibt sich also (da $\delta = L/N \to 0$ und $\tau \to 0$ wenn $N \to \infty$)

$$(+) \qquad \sigma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Da die Saite an den Enden $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist, werden kleine Schwingungen der Saite also beschrieben durch die Gleichungen

$$(++) \qquad \begin{aligned} \sigma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ u(0,t) &= u(L,t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$C_j(x,t) := \sin(j\frac{\pi}{L}x)\cos(j\omega t) \qquad \text{und} \qquad S_j(x,t) := \sin(j\frac{\pi}{L}x)\sin(j\omega t)$$

mit $\omega := \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$ Lösungen von $(++)$ sind. Folglich sind auch alle Linearkombinationen

$$(F) \qquad u(x,t) := \sum_j (a_j C_j + b_j S_j)$$

Lösungen von $(++)$ für beliebige reelle Koeffizienten a_j, b_j und beliebige natürliche Zahlen K. Die Koeffizienten a_j, b_j nennt man die Fourierkoeffizienten von u. C_j und S_j stellen Schwingungen der Frequenzen

$$\lambda_j := \frac{j}{2L}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

dar; diese Frequenzen werden Eigenfrequenzen der schwingenden Saite genannt. Ihre gegenseitigen Verhältnisse sind

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$$

Man beachte, dass durch Vergrössern der Spannung σ die Eigenfrequenzen grösser werden (höhere Töne) und dass durch Vergrössern der Dichte ϱ die Eigenfrequenzen kleiner werden (tiefere Töne). Diese Tatsache nutzt man bei Saiteninstrumenten so aus, dass man durch Verändern der Saitenspannung die Tonhöhe variiert (man nennt diesen Vorgang "stimmen") und dass man die Saiten für die tiefen Töne aus dickerem Material macht, damit sie etwa die gleiche Spannung haben wie die Saiten für die höheren Töne.

Von grösster Bedeutung ist nun, dass man jede Lösung von (++) beliebig genau durch Funktionen der Form (F) approximieren kann. Es sei $u(x,t) = \sum_j (a_j C_j + b_j S_j)$ eine Lösung von (++). Dann erhält man für die Funktionen $u_0(x) := u(x,0)$ (Auslenkung zur Zeit $t = 0$) und $u_1(x) := \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ (Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$) die Darstellungen

$$u_0(x) = \sum_j a_j \sin(j\frac{\pi}{L}x) \ , u_1(x) = \sum_j j\omega b_j \sin(j\frac{\pi}{L}x).$$

Da die Funktionen u_0 und u_1 an den Stellen $x = 0$ und $x = L$ verschwinden, gibt es Darstellungen

$$u_0(x) = \sum_j \alpha_j \sin(j\frac{\pi}{L}x) \ , u_1(x) = \sum_j \beta_j \sin(j\frac{\pi}{L}x)$$

(man setzt u_0 und u_1 auf ganz $\mathbb{R}$ fort zu ungeraden Funktionen der Periode $2L$ und nimmt deren Fourierreihen, die reine Sinus-Reihen sind). Dann ist

$$u = \sum_j (\alpha_j C_j + \frac{\beta_j}{j\omega} S_j),$$

aus den Fourierkoeffizienten α_j und β_j von u_0 bzw. u_1 erhält man also die Fourierkoeffizenten von u. (Auf Fragen der Konvergenz für unendliche Fourierreihen soll hier nicht eingegangen werden).

Damit haben wir gesehen: kleine Schwingung der Schwingenden Saite sind eine (eventuell unendliche) Überlagerung von Grundschwingungen der Frequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$.

Man kann die Fourierkoeffizienten a_j, b_j einer Lösung $u(x,t) = \sum_j a_j C_j + b_j S_j$ von (++) auch aus $v(t) := \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$ berechnen (die Funktion v beschreibt den Winkel zwischen der x-Achse und der Tangente an die schwingende Saite an ihrem linken Ende): ist

$$v(t) = \sum_j A_j \cos(j\omega t) + B_j \sin(j\omega t);$$

die Fourierentwicklung von v, dann erhält man durch Koeffizientenvergleich mit

$$v(t) = \frac{\pi}{L}\sum_j (ja_j \cos(j\omega t) + jb_j \sin(j\omega t))$$

die Gleichungen

$$a_j = \frac{LA_j}{\pi j}, \qquad b_j = \frac{LB_j}{\pi j}.$$

Insbesondere folgt, dass u schon eindeutig durch v bestimmt ist.

3. Freie Enden

Wenn das rechte Ende des Gummibandes nicht fixiert ist (wir nehmen an, dass trotzdem eine Spannung vorhanden ist; das kann etwa dadurch erreicht werden, dass die Kugeln sich reibungslos in vorgegebenen vertikalen Führungen bewegen), dann wirkt auf die N-te Kugel nur die Kraft der $(N-1)$-ten Kugel und man erhält anstelle von $(**)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{n,k+1} &= u_{n-1,k} + u_{n+1,k} - u_{n,k-1} && (0 < n < N \text{ und } k > 0) \\ u_{0,k} &= 0 && (k \geq 0) \\ u_{N,k+1} &= u_{N-1,k} + u_{N,k} - u_{N,k-1} && (k > 0). \end{aligned}$$

Anstelle von $(++)$ erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ u(0,t) &\equiv 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

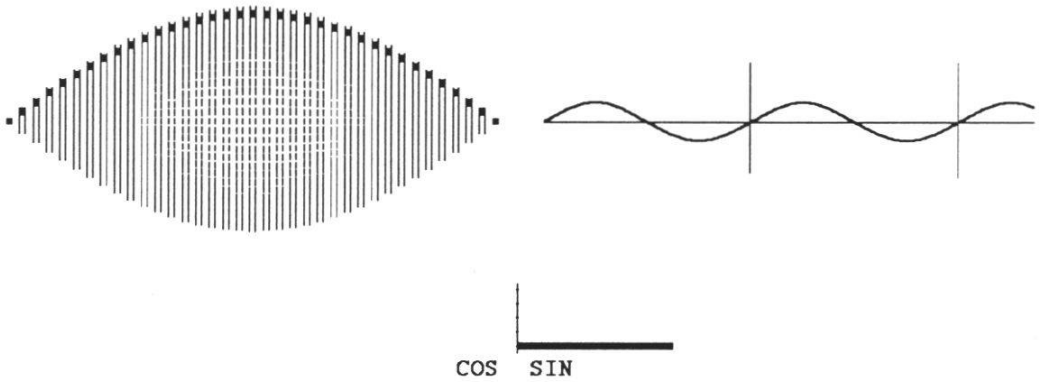
Analoge Gleichungen gelten, wenn auch das linke Ende frei ist. In dem Fall muss man jedoch darauf achten, dass einem die Saite nicht "wegschwebt"; das ist genau dann der Fall, wenn $\sum_{k=0}^{N}(u_{k,1} - u_{k,0}) = 0$ bzw. $\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,dx = 0$.

4. Beispiele

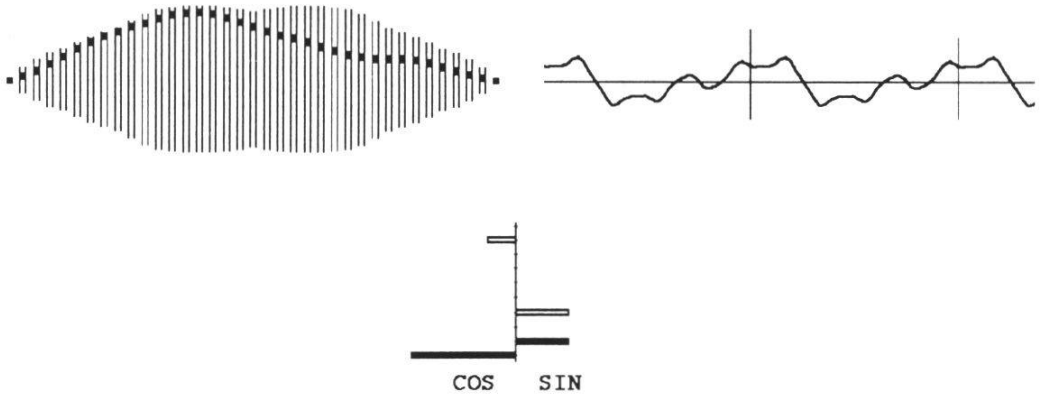
Es folgen einige Beispiele (dabei ist stets $N = 36$ und $u_{0,k} = u_{N,k} = 0$; damit man auf einem Bildschirm interessante Figuren erhält, sind in der Regel alle $u_{n,k}$ mit einer geeigneten positiven Konstanten zu multiplizieren). Die Bilder der Beispiele 1 bis 3 sind jeweils so zu interpretieren: das linke Bild zeigt eine

konkrete Stellung der Kugeln und den Weg, den jede Kugel im Laufe der Zeit durchläuft. Bei einer schnellen Schwingung nimmt das Auge also nur den Umriss des schraffierten Bereichs wahr. Das rechte Bild zeigt die Auslenkung einer speziellen Kugel, aufgetragen gegen die Zeit (in allen folgenden Beispielen ist die gleiche Zeitskala gewählt worden; zwischen zwei senkrechten Strichen ist jeweils eine Periode der Grundschwingung). Das dritte Bild enthält die Fourierkoeffizienten (unten beginnend mit a_1 bzw. b_1; nach links ist jeweils ja_j, nach rechts jb_j aufgetragen; eine ausgefüllte Linie bedeutet einen positiven Koeffizienten, eine hohle Linie einen negativen Koeffizienten; bis auf einen konstanten Faktor sind also nicht die Fourierkoeffizienten von u, sondern diejenigen von v, siehe oben, aufgetragen).

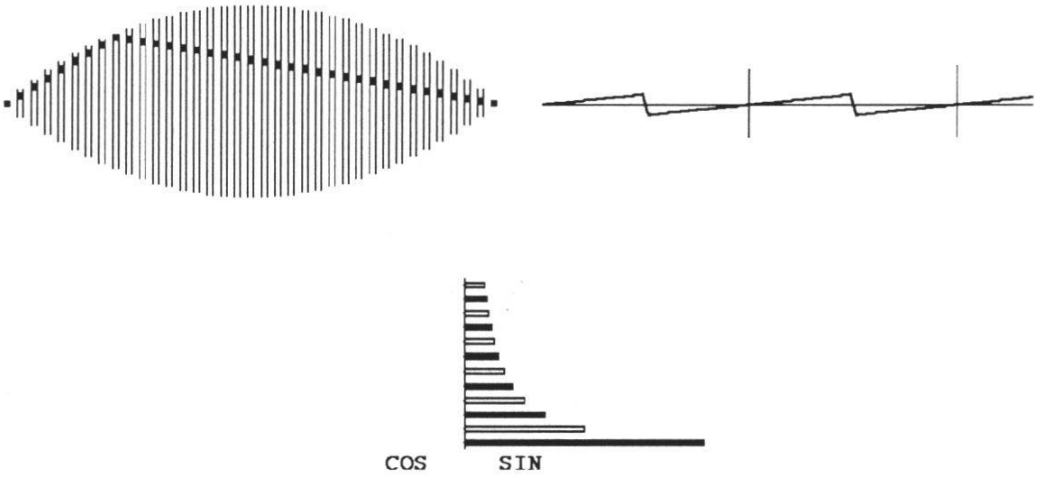
BEISPIEL 1. Setze $u_{n,0} := 0$ und $u_{n,1} := \sin(n \cdot A \cdot \frac{\pi}{N})$ für $0 < n < N$ (dabei sei $A > 0$ eine kleine natürliche Zahl). Für $A = 1$ erhält man die Grundschwingung:



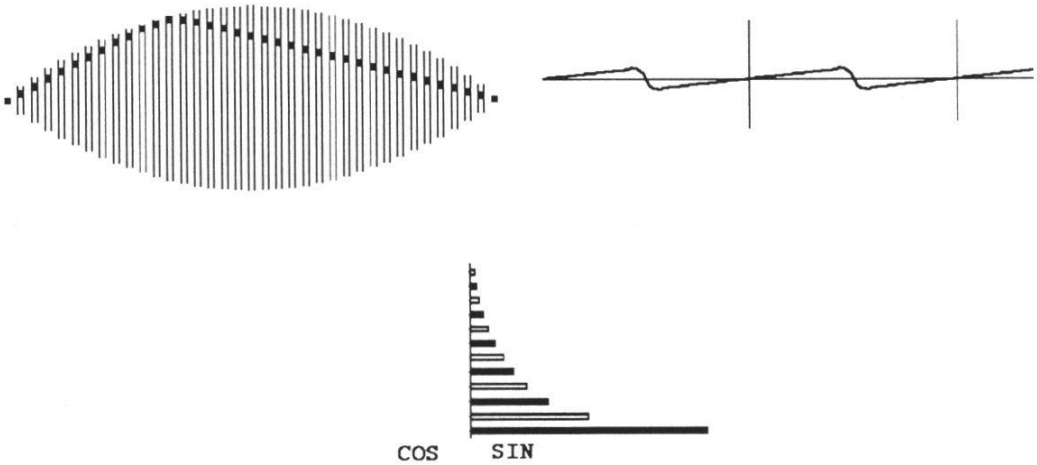
Durch eine Überlagerung von Grundschwingung und einigen Oberschwingungen erhält man zum Beispiel:



BEISPIEL 2. Setze $u_{n,0} := 0$ und $u_{n,1} := N - n$ für $0 < n < N$. Dann erhält man die Schwingungen der gestrichenen Saite:

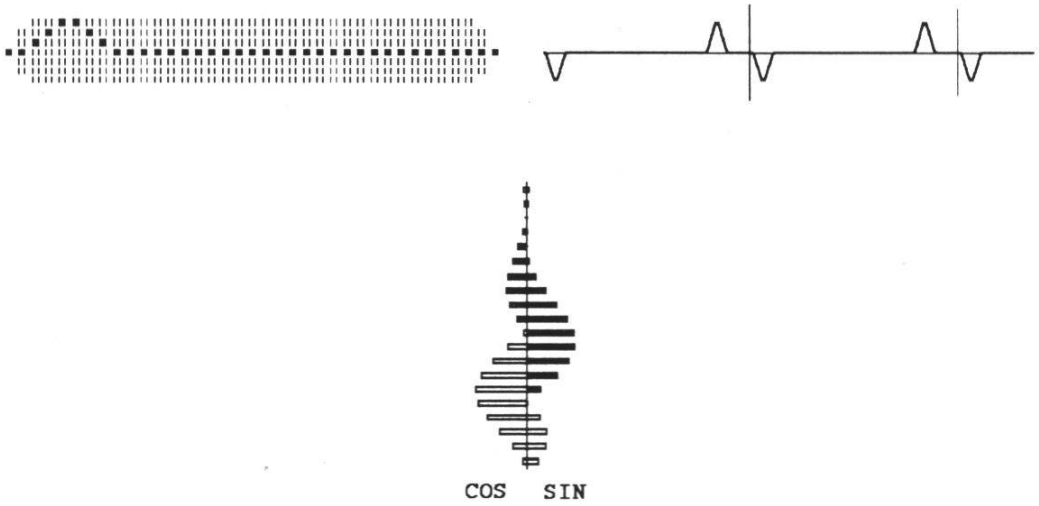


Man muss sich die Bewegung so vorstellen, dass die Spitze des Dreiecks sich im Gegenuhrzeigersinn entlang dem Rande des schraffierten Bereichs bewegt. Ändert man die Anfangsbedingungen der gestrichenen Saite etwas ab in der Art, dass der Knick abgerundet wird, so ergeben sich folgende Bilder:

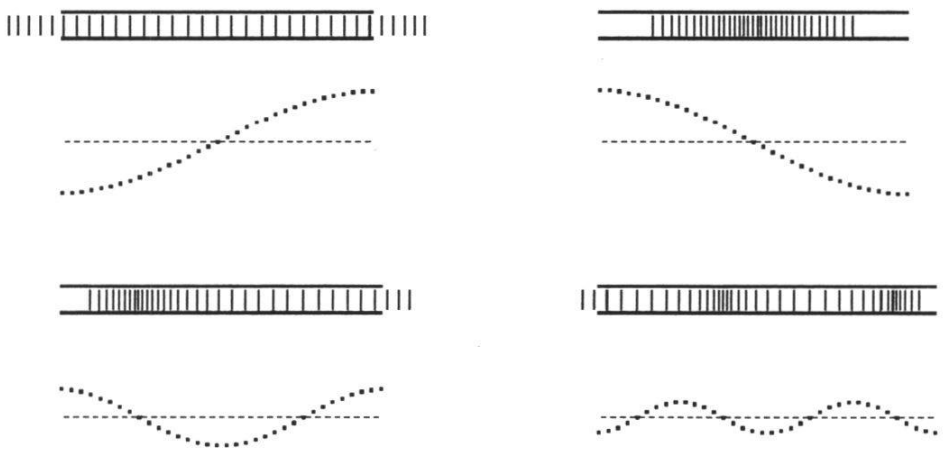


Offensichtlich hat der entsprechende Ton eine weichere Klangfarbe, da die Obertöne nur weniger intensiv mitschwingen. Je näher beim Steg eine Saite angestrichen wird, desto ausgeprägter ist der Knick und desto obertonreicher folglich der dabei entstehende Ton.

BEISPIEL 3. Setze $u_{n,0} := n$ für $0 \leq n \leq 3$, $u_{n,0} := 7 - n$ für $4 \leq n \leq 7$, $u_{n,0} := 0$ für $7 < n < N$ und $u_{n,1} := u_{n-1,0}$ für alle n. Dann erhält man eine wandernde Welle:

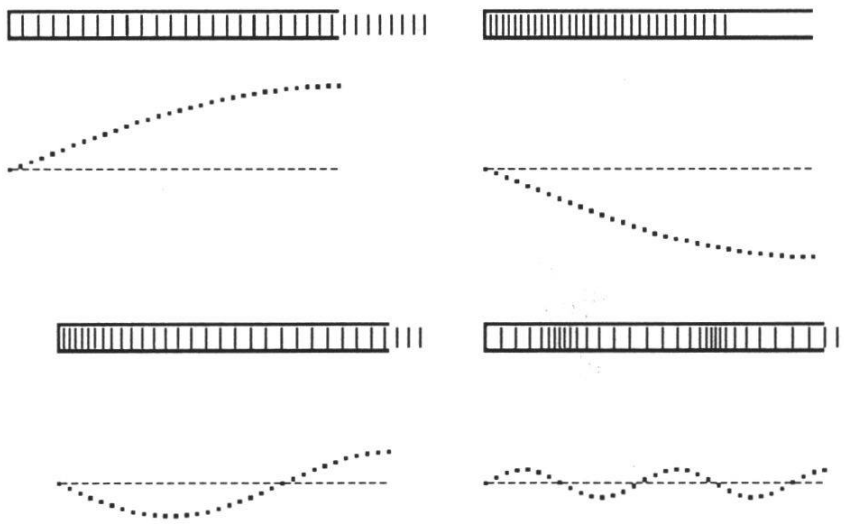


BEISPIEL 4. Die Schwingungen der Luft in einem beidseits offenen Rohr (z. B. Orgelpfeife) sind ein Beispiel für Schwingungen mit zwei freien Enden; allerdings schwingen die Luftmoleküle nicht transversal, sondern longitudinal. Die longitudinale Auslenkung der Luft wird wieder durch die Wellengleichung beschrieben (vgl. GERTHSEN, Abschnitt 4.2.2). Das Verhältnis der Eigenfrequenzen wird durch folgende Gleichungen gegeben: $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$ Die folgenden Bilder sind so zu interpretieren: im Ruhezustand füllen die senkrechten Linien das Rohr gleichmässig aus und die Kugeln liegen auf der gestrichelten Geraden. Im Schwingungszustand entspricht der horizontalen Auslenkung einer Linie im oberen Bild die vertikale Auslenkung der Kugel im jeweils unteren Bild (einer Auslenkung nach links im oberen Bild entspricht eine Auslenkung nach unten im unteren Bild). Dargestellt sind zwei Phasen der Grundschwingung und die zwei folgenden Oktaven.



Schwingungen der Luft in einem einseitig offenen Rohr (z. B. gedackte Orgelpfeife) sind ein Beispiel für Schwingungen mit einem freien Ende; bei gleicher Länge hat die Grundschwingung jedoch die halbe Frequenz wie die Schwingung

des beidseitig offenen Rohres; die Oberschwingungen stehen zueinander in den Verhältnissen $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots$ Dargestellt sind wieder zwei Phasen der Grundschwingung und zwei Oberschwingungen; die zugehörigen Eigenfrequenzen verhalten sich zueinander wie 1:3:9; durch Spiegelung des "Kugelbandes" am rechten Ende erhält man jeweils ein Schwingungsbild der schwingenden Saite doppelter Länge.



Das folgende Pascal-Programm deutet an, wie man die Schwingungen der Kugeln mit dem Computer berechnen und auf den Bildschirm bringen kann:

```
program SchwingendeKugeln;
const N=36;
type Stellung = array[0..N] of real;
var a, b, c: Stellung;
        i: integer;
procedure input;
begin
  (* Eingabe von a := (u_{0,0}, ..., u_{N,0}) und b := (u_{0,1}, ..., u_{N,1}) *)
end;
procedure zeichne;
begin
  (* löscht die durch a und zeichnet die durch b gegebene Stellung *)
end;
function stop : boolean;
begin
  (* testet, ob die Ausführung des Programms beendet werden soll *)
end;
```

```
begin
  c[0] := 0; c[N] := 0;
  input;
  repeat
    zeichne;
    for i := 1 to N-1 do c[i] := b[i - 1] + b[i + 1] - a[i];
    a := b; b := c
  until stop
end.
```

5. Dämpfung

Will man bei der Schwingung einer Saite die Dämpfung berücksichtigen, so kann man das folgendermassen tun: wir denken uns die Saite (wie bereits oben beschrieben) zerschnitten in $N+1$ Teile. Zu der Kraft, welche das $(n-1)$-te und das $(n+1)$-te Saitenelement auf das n-te Saitenelement ausüben, addieren wir die durch Reibung verursachte Kraft $-\beta\delta(u_{n,k}-u_{n,k-1})/\tau$ (dabei ist β eine Reibungskonstante, δ die Länge des n-ten Saitenelementes und $(u_{n,k}-u_{n,k-1})/\tau$ seine Geschwindigkeit zur Zeit t_k). Anstelle von $(*)$ erhält man dann die Gleichung

$$\sigma\frac{u_{n-1,k}-2u_{n,k}+u_{n+1,k}}{\delta^2}-\beta\frac{u_{n,k}-u_{n,k-1}}{\tau}=\varrho\frac{u_{n,k-1}-2u_{n,k}+u_{n,k+1}}{\tau^2}$$

und durch Grenzübergang

$$(\times)\qquad \sigma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

und damit das System

$$(\times\times)\qquad \begin{aligned}\sigma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}&=\varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\\ u(0,t)&=u(L,t)\equiv 0.\end{aligned}$$

Dieses System lässt sich nicht mehr einfach durch die ($(**)$ entsprechenden) diskreten Gleichungen

$$u_{n,k+1}=u_{n-1,k}+u_{n+1,k}-(1-\beta)u_{n,k-1}-\beta u_{n,k}$$

lösen: dem Leser sei empfohlen, mit diesen Gleichungen zu experimentieren (dabei ist in jedem Fall β klein zu wählen). Andererseits ist es nicht schwer, Lösungen von $(\times\times)$ anzugeben (wir nehmen an, dass $\varrho=\sigma=1$, $L=\pi$ und setzen $\beta=2\gamma$):

Für $0 \leq \gamma < 1$ ist

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \sum_j \left[a_j \cos(\sqrt{j^2 - \gamma^2} \cdot t) + b_j \sin(\sqrt{j^2 - \gamma^2} \cdot t) \right] \sin jx$$

eine Lösung von $(\times\times)$.

Aus den Fourierreihen von $u_0(x) := u(x,0)$ und $u_1(x) := \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ kann man die Koeffizienten a_j, b_j bestimmen. So ist z. B.

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sin(\sqrt{1-\gamma^2} \cdot t) \sin x$$

die eindeutig bestimmte Lösung mit $u(x,0) \equiv 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x$.

6. Exaktheit des Algorithmus

Eine Funktion $u(x,t)$ ist genau dann eine Lösung der Wellengleichung , wenn für beliebige x und kleine h gilt: $u(x-h,t)+u(x+h,t) = u(x,t-h)+u(x,t+h)$. (Der Beweis der einen Richtung ergibt sich leicht aus (L), für den Beweis der Umkehrung nutzt man aus, dass sich u in der folgenden Form schreiben lässt: $u(x,t) = f(x+t) - g(x-t)$). Deshalb ist der durch $(*)$ gegebene Algorithmus zur Berechnung diskreter Werte von Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung exakt. Da "kleine" Schwingungen von Saiten Lösungen der Wellengleichung sind, werden durch den Algorithmus $(**)$ "kleine" Schwingungen exakt simuliert.

Literatur

CANNON, J.T., and DOSTROVSKY, S.: The evolution of dynamics. Vibration theory from 1687 to 1742. Springer: Berlin-Heidelberg-New York 1981.

CREMER, L.: Die Physik der Geige. Hirzel: Stuttgart 1981.

FLETCHER, T.J.: L'algèbre linéaire par ses applications. CEDIC: Paris-Lyon 1972.

GERTHSEN, KNESER und VOGEL: Physik. Springer: Berlin-Heidelberg-New York 1977.

HELMHOLTZ, H. VON: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Vieweg: Braunschweig 1862 und Minerva: Frankfurt 1981.

HUTCHINS, C.M.: Klang und Akustik der Geige. In: Die Physik der Musikinstrumente, 88-98. Spektrum der Wissenschaft Verlagsges.: Heidelberg 1988.

ROEDERER, J.G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik. Springer: Berlin-Heidelberg-New York 1977.

SCHELLENG, J.C.: Die gestrichene Saite. In: Die Physik der Musikinstrumente, 78-87. Spektrum der Wissenschaft Verlagsges.: Heidelberg 1988.