Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 97-98 (2008-2009)

Artikel: Percées dans la résolution d'un problème mathématique

Autor: Berrut, Jean-Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-308880

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Percées dans la résolution d'un problème mathématique

Jean–Paul Berrut
Département de mathématiques
Université de Fribourg
1700 Fribourg/Pérolles

1. Introduction

Les victoires du syndicat suisse Alinghi dans le cadre de la coupe de l'America ont mis en lumière le fait que, de nos jours, tant les bateaux que les voitures ou les avions sont dessinés par ordinateur. Mais que cela signifie–t–il au juste ?

Ces moyens de transport se déplacent dans des fluides, l'eau et/ou l'air. Leur forme obéit certes à des considérations esthétiques, mais est surtout optimisée de façon à minimiser la résistance à ces fluides, ou à profiter de ceux–ci pour garantir certaines propriétés. (Savez-vous, par exemple, qu'un avion tient en l'air grâce à la différence de pression entre la face supérieure et la face inférieure de ses ailes ? Cette différence est obtenue par la forme de ces dernières, qui accélère l'air sur la face supérieure.)

Pour réaliser une telle optimisation, on reproduit mathématiquement dans l'ordinateur le moyen de transport projeté (disons un avion) et munit l'espace (le domaine) qui l'entoure et que remplit le fluide d'un système de coordonnées (x, y, z). Un ensemble d'équations aux dérivées partielles, dites d'Euler ou de Navier–Stokes suivant la viscosité, détermine alors en dépendance du temps t le vecteur $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ de la vitesse du fluide ainsi que sa pression p en *tout* point (x, y, z) du domaine. ($\mathbf{v}$ et p dépendent l'une de l'autre et doivent être calculées simultanément.) p permet de comparer les propriétés des différentes formes testées de l'avion. $\mathbf{v}$ et p sont donc *fonction* des quatre grandeurs x, y, z et t. Des équations d'une telle complexité ne peuvent être résolues analytiquement; leur solution ne s'exprime pas en termes de fonctions connues. Par ailleurs, ces grandeurs x, y, z et

t remplissent tout un domaine continu contenant une infinité de points dans lequel *il est impossible de trouver* v *et* p *par le calcul (nécessairement fini).* On doit se contenter de les déterminer en un nombre fini d'endroits que l'on obtient comme points de croisement d'une grille appelée *maillage* que l'on pose dans le domaine.

2. Interpolation

Laissons le cas, par trop complexe, de l'écoulement de fluides dans un espace tridimensionnel et tournons–nous vers un exemple simple qui permet néanmoins d'expliciter le problème qui nous intéresse ici. Supposons que, quittant une ville au temps $t = 0$, vous vous déplaciez en voiture sur une route parfaitement rectiligne (comme une version idéalisée de celle qui relie Joshua Tree à Twentynine Palms en Californie). Vous occuperez en tout temps t une certaine position, mesurée par exemple par la distance parcourue depuis Joshua Tree, qui se concrétise en un nombre $u(t)$, *fonction* de t.

Vous vous déplacerez par ailleurs en tout temps à une certaine vitesse $v(t)$, variation instantanée de la position u et également fonction de t. Comme vous le savez sans doute, on appelle *dérivée* la variation instantanée d'une fonction et l'écrit $u'(t)$. On a donc $v(t) = u'(t)$.

Cette vitesse va en général varier elle aussi, par exemple lorsque vous devrez ralentir en vous rapprochant d'un véhicule plus lent, enlever vos lunettes de soleil à la tombée de la nuit ou vous désaltérer, ceci avant de réaccélérer pour reprendre une vitesse plus régulière. La variation instantanée de la vitesse, sa dérivée, est l'accélération $a(t) = v'(t)$. Elle est ainsi la dérivée de la dérivée de la position $u(t)$, donc sa dérivée seconde $u''(t)$. Et l'on peut en général poursuivre ce processus de dérivation à volonté en considérant la variation instantanée de $a(t)$, dérivée troisième de $u(t)$, etc.; on dit alors de u qu'elle est infiniment dérivable.

Supposons maintenant que vous soyez parvenu à Twentynine Palms après un voyage d'une durée T et que l'on veuille décrire mathématiquement le trajet parcouru sur la route rectiligne, c'est–à–dire trouver une formule donnant pour tout instant t entre 0 et T la position u de la voiture, dont on pourra tirer sa vitesse v, son accélération a et les autres dérivées.

La difficulté fondamentale, mentionnée déjà dans le cas tridimensionnel, réside précisément dans le fait que u prend une valeur (mesurée par exemple en km) pour *tout* temps t et que l'intervalle $[0, T]$ contient une quantité indénombrable de tels t, alors qu'en pratique on ne peut la mesurer que pour un nombre fini de valeurs de t, disons

$$t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots, t_N \qquad \text{avec } t_0 = 0,\ t_N = T. \tag{1}$$

Celles–ci seront en général équidistantes, donc l'intervalle de temps entre deux mesures sera constant, par exemple une minute, et l'on mesurera la position après une minute, deux minutes, trois minutes, etc. : $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, etc.

Afin d'obtenir une valeur approchée de u et de ses dérivées en dehors de ces instants, on va construire une autre fonction $\widehat{u}$ qui approche u en toute valeur de t. Dans ce but, on fait naturellement passer le graphe de $\widehat{u}$ par les valeurs mesurées $\big(t_k, u(t_k)\big)$. $\widehat{u}$ satisfait alors aux *conditions d'interpolation* $\widehat{u}(t_k) = u(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, et l'on dit qu'elle *interpole* u aux t_k.

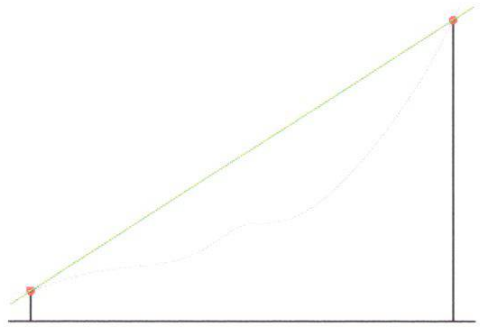

Figure 1

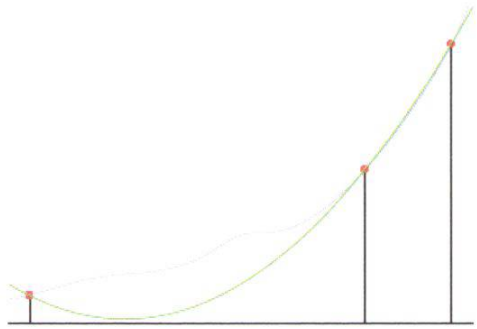

Figure 2

Commençons par des exemples. Supposons que l'on ne mesure qu'au début et à l'arrivée du voyage, si bien que l'information à disposition ne consiste qu'en les valeurs $\big(0, u(0)\big)$ et $\big(T, u(T)\big)$ — kilométrage $u(0)$ au départ de Joshua Tree au temps $t = 0$, durée totale T du trajet et kilométrage à l'arrivée à Twentynine Palms. Comme on l'apprend au gymnase, un des axiomes d'Euclide postule qu'il existe une droite unique par ces deux points du graphe de u. Cette droite est un polynôme du premier degré, pour lequel la géométrie analytique de Descartes et Fermat donne la formule suivante (figure 1) :

$$\widehat{u}(t) = u(0) + \frac{u(T) - u(0)}{T - 0} t. \tag{2}$$

Si l'on ajoute une valeur, disons le temps de passage t_1 au milieu du parcours (résultant au total en trois valeurs 0, t_1 et T non–équidistantes de t), le polynôme le plus simple par $(0, 0)$, $\big(t_1, \frac{u(T)}{2}\big)$ et $\big(T, u(T)\big)$ sera une parabole, un polynôme $\widehat{u}$ de degré deux (un de moins que le nombre de mesures) (figure 2). Dans le cas des $N + 1$ instants (1), il existe un seul polynôme $\widehat{u}$ de degré au plus N passant par les points $\big(t_k, u(t_k)\big)$ du graphe; il peut être exprimé par toute une série de formules équivalentes portant le nom de savants comme Newton ou Lagrange, dont la célébrité témoigne de l'importance de ce problème.

Malheureusement, l'existence d'un objet mathématique et d'une formule permettant son calcul est une chose, son utilité pratique en est une autre. Dans le cas de mesures équidistantes, le polynôme $\widehat{u}$ passe certes par les valeurs $(t_k, u(t_k))$, mais oscille souvent de manière catastrophique entre les points d'interpolation extrêmes, et ce d'autant plus fortement que le nombre $N+1$ de ces derniers est grand, voir figure 3 pour $N = 16$. (La fonction approchée u est en bleu, les valeurs interpolées sur le graphe sont marquées par des disques rouges et l'approximant $\widehat{u}$ en vert.) Cet effet est appelé *phénomène de Runge*, du nom du mathématicien allemand qui l'a expliqué en 1901. L'auteur d'un article de vulgarisation récent l'a jugé assez important pour le mentionner parmi les propriétés fondamentales des polynômes [Leh].

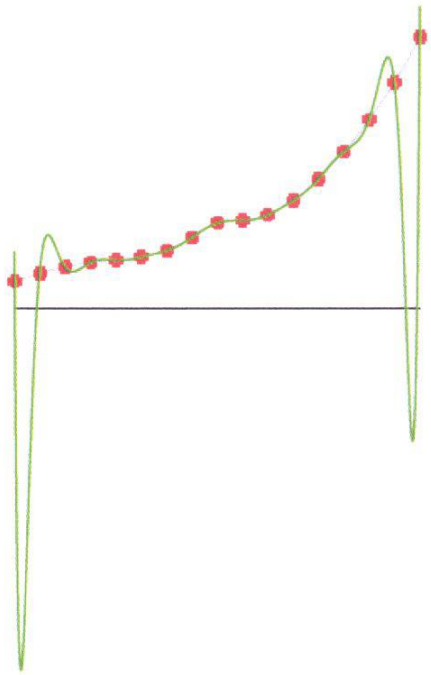

Figure 3

En fait, ce problème d'interpolation est si important que mathématiciens et ingénieurs ont depuis longtemps trouvé une parade au phénomène de Runge : au lieu de faire passer le même polynôme par tous les points du graphe, ils construisent un polynôme différent, souvent de degré 3, sur chaque sous–intervalle reliant deux points t_k successifs. Le résultat global $\widehat{u}$ (appelé *spline*) n'est alors que quelques fois dérivable aux t_k, suffisamment cependant pour les besoins de ses utilisateurs.

Alors pourquoi poursuivre la recherche d'interpolants infiniment dérivables ? Pour le défi de correspondre à la nature, évidemment. Mais pas uniquement. Il s'avère en effet (voir plus bas) qu'il faut parfois beaucoup moins de points t_k, donc de valeurs de u, pour que $\widehat{u}$ approche celle–ci avec une précision donnée. Cette propriété est souvent cruciale, car elle diminue le volume des données $u(t_k)$ à obtenir et mettre en mémoire ainsi que le calcul nécessaire à l'évaluation de $\widehat{u}$ en une valeur quelconque de t. Cet aspect est d'autant plus important que la dimension est élevée : là où il faut 100 points pour approcher à une dimension, il en faut naturellement 10'000 à deux dimensions, un million en dimension 3 et 100 millions en dimension 4.

3. Améliorations par rapport au polynôme d'interpolation

Revenons au polynôme d'interpolation.La manière la plus simple de le modifier est de le diviser par un autre polynôme pour obtenir ce que l'on appelle une *fonction rationnelle.* L'ajout de ce dénominateur pour des conditions d'interpolation inchangées modifie le polynôme du numérateur; ce dernier est cependant toujours uniquement déterminé, comme avec le dénominateur constant 1 contenu implicitement dans les exemples polynomiaux vus plus haut.

Pour diverses raisons, l'interpolant maintenant rationnel $\widehat{u}$ devra par ailleurs conserver une propriété importante du polynôme d'interpolation appelée *linéarité.* Celle–ci stipule que l'interpolant d'une somme u_1+u_2 de fonctions doit être la somme des deux interpolants correspondant chacun à l'une des deux fonctions u_1 et u_2, et celui du pourcentage d'une fonction u le même pourcentage de l'interpolant de u. Il est aisé de voir par exemple que l'interpolant correspondant à trois t_k équidistants satisfait à ces conditions : la parabole interpolant la somme de deux fonctions u_1 et u_2 en 0 et T est la somme des deux paraboles correspondant séparément à u_1 et u_2 (figure 4).

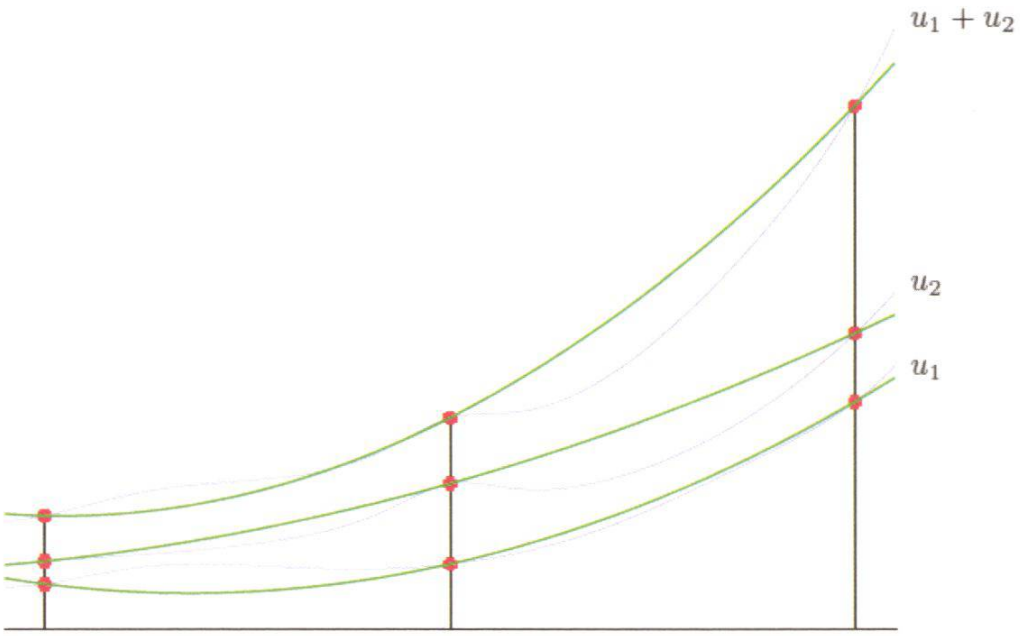

Figure 4

Pour conserver cette propriété avec l'interpolant rationnel, il sera nécessaire que le dénominateur de ce dernier ne dépende pas de la fonction interpolée u (comme dans le

cas polynomial avec le dénominateur constant 1) et, pour ne pas commettre le crime de division par zéro, qu'il soit non–nul pour toute valeur de t.

Après ces longs préparatifs, venons–en au coeur de notre histoire. Vers la fin de mon doctorat, et à la suite d'une mauvaise manipulation informatique inconcevable aujourd'hui, des résultats exceptionnellement bons pour l'interpolation de fonctions périodiques sont apparus sur l'un des listings utilisés à l'époque. J'ai dû attendre le calme de mon premier poste aux USA pour étudier et comprendre le phénomène, que je suis ensuite parvenu à adapter au cas non–périodique qui nous concerne ici et ainsi construire les premiers interpolants rationnels linéaires pour points quelconques, publiés en 1988 [Ber1]. La qualité de l'un d'entre eux — dénoté par $R(t)$ ci–dessous — est fantastique lorsque les points peuvent être choisis : avec Richard Baltensperger, actuellement professeur à l'Ecole d'Ingénieurs et d'Architectes de Fribourg, nous l'avons utilisé pour développer une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles comme des versions simplifiées de celles d'Euler ou de Navier–Stokes mentionnées au début. Poursuivant ces recherches, et mettant aussi à profit des travaux effectués en collaboration avec Hans Mittelmann, professeur à Arizona State University, sur des équations dont la solution présente des fronts, c'est–à–dire des portions extrêmement pentues, Nick Trefethen de l'Université d'Oxford et son doctorant Wynn Tee ont étendu cette méthode à des problèmes plus complexes pour lesquels ils ont obtenu de remarquables résultats [Tee-Tre]. Ils sont par exemple parvenus à déterminer avec une erreur relative de 10^{-10} l'instant de l'explosion thermique induite par des réactions chimiques exothermiques en n'utilisant que 57 points t_k, alors qu'il en faudrait des milliers avec des splines — un exemple, annoncé plus haut, de résultat très précis obtenu avec relativement peu de points. La méthode a aussi été utilisée tout récemment par Luis Cueto-Felgueroso et Ruben Juanes du Massachusetts Institute of Technology pour expliquer les "doigts" apparaissant lors de l'infiltration de liquides dans des sols poreux [Cue-Jua].

Cependant, dans le cas général où les t_k sont donnés et ne peuvent être choisis — par exemple celui de points équidistants — cette fonction rationnelle linéaire $R(t)$ n'était pas une assez bonne approximation pour être vraiment utile. J'ai continué durant une quinzaine d'années à réfléchir épisodiquement à ce problème jusqu'à ce que, travaillant sur des interpolants à plusieurs dimensions, Michael Floater de l'Université d'Oslo et Kai Hormann de celle de Clausthal soient tombés séparément sur mon article de 1988 et aient tenté chacun de son côté de l'améliorer. Dans un papier mis sur l'internet en 2006 [Flo-Hor], ils ont publié une solution commune consistant en une correction de R aux extrémités de l'intervalle. Elle a attiré de manière étonnamment rapide l'attention des auteurs de l'ouvrage "Numerical Recipes" [Pre-Teu-Vet-Fla], compendium d'excellents algorithmes

pour l'utilisateur qui a besoin de résoudre des problèmes numériques sans pouvoir étudier dans le détail des mathématiques sous-tendant les méthodes. La troisième édition de cet ouvrage, parue en 2007, consacre tout un paragraphe à cette *interpolation rationnelle barycentrique*, dénomination que Richard Baltensperger, Hans Mittelmann et moi–même lui avions donnée en 2005 [Ber-Bal-Mit]. Ses auteurs disent en introduction: "This is the only method in this chapter for which we might actually encourage experimentation with high order (say, > 6). Barycentric rational interpolation competes very favorably with splines: its error is often smaller, and the resulting approximation is infinitely smooth (unlike splines)."

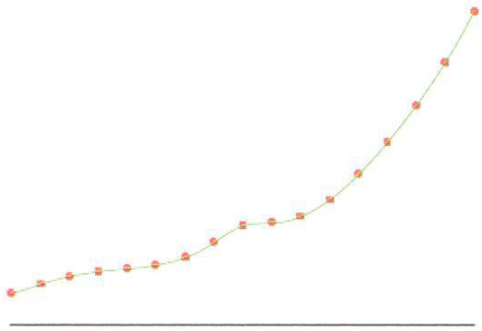

Figure 5a

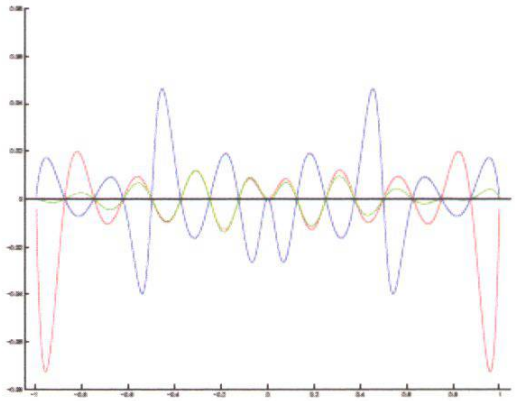

Figure 5b

Afin que le lecteur puisse apprécier la simplicité de tels interpolants, je me permets d'écrire leur formule générale donnée pour le polynôme [Ber-Tre] par l'américain Taylor en 1945 et dans le cas non linéaire par les allemands Schneider et Werner en 1986 [Sch-Wer] :

$$r(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{w_k}{t - t_k} u(t_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{w_k}{t - t_k}}. \tag{3}$$

Une introduction en français à cette formule se trouve dans le compte rendu de ma leçon inaugurale [Ber3]. Tout l'art réside dans le choix du nombre w_k (que l'on appelle *poids*) associé au point t_k. Les w_k utiles pour l'interpolation linéaire sont de signe alterné. En valeur absolue, ceux de R étaient $1/2, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 1, 1/2$, alors que ceux de Floater et Hormann prennent plusieurs valeurs différentes de 1 aux extrémités, valeurs qui de-

viennent malheureusement de plus en plus petites lorsque la précision requise augmente, rendant l'évaluation de r de plus en plus difficile.

La figure 5a montre l'interpolant rationnel barycentrique linéaire avec des poids de Floater et Hormann passant par les mêmes valeurs que sur la figure 3. La figure 5b montre les erreurs, en rouge pour l'interpolant rationnel avec des poids non optimaux et en vert pour l'interpolant rationnel avec poids optimaux. Pour revenir à l'exemple de la voiture, une fois déterminé l'interpolant $\widehat{u}(t)$ de sa position $u(t)$, on peut approcher sa vitesse $u'(t)$, respectivement son accélération $u''(t)$, en calculant simplement $\widehat{u}'(t)$, resp. $\widehat{u}''(t)$. Il suffit pour cela d'évaluer la formule étonnamment élégante donnée dans [Sch-Wer] pour le calcul des dérivées d'un interpolant rationnel sous forme (3).

De mon côté, j'ai cherché à améliorer l'interpolant appelé sinc (de "sinus cardinalis", en fait la fonction $\sin x/x$, qui a trouvé de multiples applications en théorie du signal) après m'être aperçu que, dans le cas de points équidistants, R pouvait être interprété comme quotient d'interpolants sinc tronqués aux extrémités de l'intervalle (alors qu'ils interpolent normalement sur toute la droite de moins l'infini à plus l'infini — le lecteur trouvera une introduction en français à cet interpolant dans [Ber2].) Après être parvenu à comprendre ces effets de troncature, je les ai corrigés pour obtenir de nouveaux interpolants linéaires que l'on peut caractériser comme des *interpolants sinc extrapolés rationnels.* Ils sont certes légèrement plus compliqués que (3) et doivent encore être étudiés de manière plus poussée; les calculs numériques montrent cependant une précision comparable à celle de r avec les w_k de Floater et Hormann et surtout n'indiquent pas d'instabilité du calcul liée à l'augmentation de la précision requise. A l'échelle de la figure 5a, la précision avec un tel quotient d'interpolants sinc extrapolés reste la même; l'erreur d'approximation avec ces 17 points apparaît en bleu sur la figure 5b.

Les spécialistes de l'approximation testent généralement leurs méthodes en se donnant une fonction à approcher f et calculant la différence maximale entre leur approximant et cette fonction sur un certain intervalle. Mes résultats pour $f(t) = \sinh(10t)/(1+t^2)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont réunis dans la table ci–dessous. La première colonne donne le nombre de points d'interpolation moins 1, les deux suivantes l'erreur de l'interpolant rationnel avec deux valeurs différentes des poids de Floater et Hormann (déterminées par un paramètre d) et la quatrième l'erreur avec l'interpolant sinc extrapolé rationnel, la lettre "e" signifiant "10 puissance". Jusqu'à la mise sur l'internet de l'article de Floater et Hormann en 2006, on ne pouvait que rêver de tels résultats avec des interpolants infiniment dérivables entre points équidistants.

N	FH, $d = 4$	FH, $d = 8$	Sinc extrapolé
8	4.12e + 1	4.91e0	3.06e + 1
16	2.60e0	4.91e − 2	7.40e − 1
32	1.17e − 1	2.29e − 4	4.89e − 3
64	2.81e − 3	3.73e − 7	8.61e − 6
128	3.90e − 5	2.54e − 10	3.91e − 9
256	7.91e − 7	1.46e − 11	2.27e − 11
512	2.12e − 8	1.36e − 11	1.55e − 11

4. Développements futurs

Il faut cependant rappeler que l'interpolant de Floater et Hormann existe pour des points quelconques, alors que le sinc n'interpole en principe qu'en des points équidistants. Pourra–t–on généraliser ce dernier ? Tous ces interpolants se laisseront–ils adapter à plusieurs dimensions ? Trouvera–t–on, pour une classe donnée de fonctions, des interpolants infiniment dérivables utilisant un minimum de valeurs de la fonction ? La quête de tels objets est dans un certain sens un problème typique des mathématiques appliquées : contrairement à la plupart des conjectures célèbres comme celles pour la résolution desquelles le Clay Institute attribue un prix d'un million de dollars (la démonstration de l'existence de solutions des équations de Navier–Stokes, par exemple), il n'appelle pas de réponse définitive par oui ou par non ou sous forme de démonstration, mais plutôt une patiente amélioration de méthodes existantes. La recherche dans ce domaine va probablement durer encore des lustres, si tant est qu'elle aboutisse un jour.

Références

[Ber1] Berrut J.–P., Rational functions for guaranteed and experimentally well–conditioned global interpolation, *Comput. Math. Appl.* **15** (1988) 1–16.

[Ber2] Berrut J.–P., Quelques exemples simples d'applications de la fonction SINC en analyse numérique, in: *Les Annales du Centenaire de l'Université de Fribourg (Suisse)* (1991) 191–196.

[Ber3] Berrut J.–P., Fascinante interpolation, *Bull. Soc. Frib. Sc. Nat.* **83** (1994) 3–20.

[Ber-Bal-Mit] Berrut J.–P., Baltensperger R., Mittelmann H. D., Recent Developments in Barycentric Rational Interpolation, in: M.G. de Bruin, D.H. Mache & J. Szabados, *Trends and Applications in Constructive Approximation* (International Series of Numerical Mathematics ISNM Vol. 151, Birkhäuser, Basel, 2005) 27–51.

[Ber-Tre] Berrut J.–P., Trefethen L. N., Barycentric Lagrange interpolation, *SIAM Rev.* **46** (2004) 501–517.

[Cue-Jua] Cueto-Felgueroso L., Juanes R., Adaptive rational spectral methods for the linear stability analysis of nonlinear fourth–order problems: application to a phase–field model of infiltration, *J. Comput. Phys.* **228** (2009) 6536–6552.

[Flo-Hor] Floater M. S., Hormann K., Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation, *Numer. Math.* **107** (2007) 315–331.

[Leh] Lehning H., Les polynômes, *La Recherche* **421** (2008) 93–96.

[Pre-Teu-Vet-Fla] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Numerical Recipes* (3d ed., Cambridge Univ. Press, 2007).

[Sch-Wer] Schneider C., Werner W., Some new aspects of rational interpolation, *Math. Comp.* **47** (1986) 285–299.

[Tee-Tre] Tee T. W., Trefethen L. N., A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points, *SIAM J. Sci. Comput.* **28** (2006) 1798–1811.