

# Metasprache und Semantik

Autor(en): **Brander, Martin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Freiburger Zeitschrift für Philosophie und Theologie = Revue philosophique et théologique de Fribourg = Rivista filosofica e teologica di Friburgo = Review of philosophy and theology of Fribourg**

Band (Jahr): **16 (1969)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-760438>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MARTIN BRANDER

# Metasprache und Semantik

## Eine Einführung in Tarskis Definition des Wahrheitsbegriffes

Alfred Tarski (\*1901, Mathematiker und Logiker) gilt als Vertreter der sogenannten «Hard Analysis», jener Richtung der heutigen Analytischen Philosophie, die die philosophischen Probleme mit Hilfe der mathematischen Logik zu klären versucht. Im Gegensatz dazu bleibt die «Soft Analysis» in ihren Untersuchungen ausdrücklich innerhalb der Umgangssprache. Beiden gemeinsam ist die Analyse der Sprache, d. h. bestimmter Ausdrücke eines Sprachsystems.

Die vorliegende Darstellung soll zeigen, daß die mathematische Logik in der Philosophie eine wertvolle Rolle zu spielen vermag und kein Privileg der Mathematiker zu sein braucht. Wir stützen uns dabei vorwiegend auf TARSKI 1935<sup>1</sup>, eine Untersuchung, in der der Aufbau der Semantik am Beispiel des Wahrheitsbegriffes<sup>2</sup> bis in technische Einzelheiten erörtert wird. TARSKI 1944, vorzüglich als Einführung geeignet, faßt das Vorgehen kurz zusammen und diskutiert die wichtigsten Einwände.

Wir geben im folgenden zuerst einige Hinweise zum geschichtlichen Zusammenhang des Problems (1). Dann werden die wichtigsten Grundbegriffe erklärt (2) und der Aufbau der Metasprache bzw. der Semantik kurz skizziert (3), und zwar anhand der formalisierten Sprachen. Der Wahrheitsbegriff wird die Ausführungen wie ein roter Faden durch-

<sup>1</sup> Zu den Abkürzungen der Titel siehe die Literatur-Hinweise am Schluß des Artikels.

<sup>2</sup> Wenn wir von «Wahrheitsbegriff» oder von «Wahrheit» reden, so meinen wir damit «wahre Aussage» im Sinne von Tarski.

ziehen, denn von ihm aus wurde die Problematik aufgeworfen, und er gilt auch als Musterbeispiel eines semantischen Begriffes. Abschließend soll die Bedeutung und Anwendbarkeit der Semantik aufgezeigt werden (4).

### 1. Zur Geschichte der Metasprache

In den Schriften des *Aristoteles* und der *Stoiker* finden sich einige Ansätze zu metasprachlichen Formulierungen von Syllogismen<sup>3</sup>. Die *Scholastik* nimmt mit der Suppositionstheorie bereits die klare Trennung von Objektsprache und Metasprache vorweg. Aber eine eingehende systematische Entwicklung der Metalogik und damit der Metasprache stellen wir erst seit etwa 1930 fest, vorwiegend bei G. Frege, D. Hilbert, A. Tarski und R. Carnap.

*Gottlob Frege* (1848–1925) benützt die metasprachliche Sprechweise beispielhaft. Er zeigt das in seiner Bemerkung über den Gebrauch von Anführungszeichen, die er für außerordentlich wichtig hält. Setzt er ein Zeichen (Wort) in Anführungszeichen, dann spricht er vom Zeichen selbst, also auf metasprachlicher Ebene. Braucht er keine Anführungszeichen, dann spricht er von der Bedeutung des Zeichens, also auf objektsprachlicher Ebene<sup>4</sup>. Erstaunlicherweise taucht diese Theorie in den «*Principia Mathematica*» von Whitehead und Russell nicht mehr auf<sup>5</sup>.

*David Hilbert* (1862–1943) hat den Anfang zur Systematisierung der Metatheorie gesetzt. Zur eigentlichen, formalisierten Mathematik fordert er eine zweite, inhaltlich schließende Mathematik, die Metamathematik. Er trennt so die bloßen Formeln (der formalisierten Mathematik) von den inhaltlichen Regeln des Schließens (der Metamathematik)<sup>6</sup>. Damit unterscheidet Hilbert erstmals ausdrücklich die Wissenschaft (Theorie) von der (dazugehörigen) Metatheorie. Aber seine Untersuchung bleibt noch im Bereiche der Mathematik. Im Anschluß daran entwickelt K. Gödel die Metamathematik weiter.

<sup>3</sup> Zu diesem Abschnitt siehe die betreffenden Kapitel in J. M. BOCHENSKI: *Formale Logik*. Freiburg – München 1956, <sup>2</sup>1962.

<sup>4</sup> G. FREGE: *Über Sinn und Bedeutung*. In: *Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik* 100 (1892) 25–50, vgl. 28. Ferner: *Grundgesetze der Arithmetik – begriffsschriftlich abgeleitet*. (2 Bde.) Jena 1893–1903, vgl. Bd. I, 4.

<sup>5</sup> Die Sätze \*1.1 und \*1.11 der «*Principia Mathematica*» sind metasprachliche, \*1.2 bis \*1.6 objektsprachliche und \*1.7 bis \*1.72 wieder metasprachliche Aussagen.

<sup>6</sup> D. HILBERT: *Die logischen Grundlagen der Mathematik*. In: *Mathematische Annalen* 88 (1923) 151–165, vgl. 152–153.

Die *Warschauer Schule*, besonders J. Łukasiewicz. S. Leśniewski und sein Schüler Alfred Tarski, stützt sich auf die bisher gewonnenen Ergebnisse und baut die Metalogik systematisch aus. 1933 legt Tarski sein semantisches System in der Untersuchung über den Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen vor<sup>7</sup>. Durch die Trennung von Objektsprache und Metasprache gelingt es ihm, den Wahrheitsbegriff für gewisse Sprachen widerspruchsfrei zu definieren.

*Rudolf Carnap* (\*1891) baut später unter dem Einfluß von Tarski die Semantik entscheidend aus<sup>8</sup>. Seine Arbeiten überzeugten ihn auch davon, daß die rein formale Methode der Syntax von der Semantik her zu ergänzen ist. Neu bei ihm ist die Einteilung der Semantik in eine deskriptive (empirische) und eine reine<sup>9</sup>. Ferner führt er die sogenannte L-Semantik ein, eine Semantik, die rein logisch vorgeht<sup>10</sup>. In der «Logischen Syntax der Sprache», fast gleichzeitig mit Tarskis Untersuchung zum Wahrheitsbegriff veröffentlicht, gehört die Syntaxsprache (d. h. die Metasprache) bereits zu den geläufigsten Begriffen seines Systems<sup>11</sup>.

## 2. Die Grundbegriffe

Die wichtigsten Grundbegriffe, die wir zunächst zu klären suchen, sind: Semantik, Objektsprache und Metasprache. Dann fragen wir, warum die Unterscheidung zwischen zwei Sprachstufen eine so bedeutende Rolle spielt.

### 2.1 Semantik und semantisch

Seit Ch. W. Morris<sup>12</sup> teilt man die Semiotik gewöhnlich ein in:  
(1) Syntax: Theorie der Beziehungen zwischen den einzelnen Zeichen.

<sup>7</sup> Siehe TARSKI 1956, 152 (Bibliographical Note). Über den Einfluß von Gödel siehe TARSKI 1935, 404-405. Über den Einfluß von Leśniewski siehe TARSKI 1944, 80 (Anm. 7).

<sup>8</sup> Siehe CARNAP 1942, S. VI-VII.

<sup>9</sup> Siehe CARNAP 1942, § 5.

<sup>10</sup> Siehe CARNAP 1942, §§ 13-23.

<sup>11</sup> R. CARNAP: *Logische Syntax der Sprache*. Wien 1934, <sup>2</sup>1968. Siehe 4 und 106-113. Carnap lehnt die These Wittgensteins ab, nach der keine sinnvollen Aussagen über die Sprache gemacht werden können (siehe 208-209). Die Untersuchungen von Carnap und Tarski zeigen gerade, daß es möglich ist, sinnvoll über die Sprache zu sprechen.

<sup>12</sup> Ch. W. MORRIS: *Foundations of the Theory of Signs*. *Encyclopedia of Unified Science*, vol. I Nr. 2. Chicago 1938. CARNAP 1942 gibt in § 4 eine kurze Übersicht zu den einzelnen Teilen der Semiotik.

- (2) Semantik: Theorie der Bedeutung d. h. der Beziehung zwischen Zeichen und Gemeintem<sup>13</sup>.
- (3) Pragmatik: Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen und den sie gebrauchenden Menschen.

Die Pragmatik fällt in unserer Darstellung weg. Tarski spricht nur von der Semantik und der Morphologie der Sprache. Damit sind Semantik und Syntax im obigen Sinne gemeint, jedoch ohne klare Abgrenzung der beiden Begriffe.

Tarski definiert die Semantik folgendermaßen: «Unter Semantik werden wir die Gesamtheit der Betrachtungen verstehen, die sich auf diejenigen Begriffe beziehen, in denen – frei ausgesprochen – gewisse Zusammenhänge zwischen den Ausdrücken einer Sprache und den durch sie angegebenen Gegenständen und Sachverhalten ihren Ausdruck finden»<sup>14</sup>. «Bezeichnen», «erfüllen», «definieren» oder «wahre Aussage» sind z. B. solche semantische Begriffe. Die Semantik beschäftigt sich mit Begriffen, die eine Beziehung zwischen dem sprachlich Bezeichnenden (den «Ausdrücken der Sprache») und dem damit Bezeichneten oder Gemeinten («den durch sie angegebenen Gegenständen oder Sachverhalten») ausdrücken. So untersucht sie den Begriff «bezeichnen» im Satz: «Der Ausdruck 'der Sieger von Jena' bezeichnet den Napoleon Bonaparte»<sup>15</sup>. Tarski beschränkt sich auf die eine zweistellige Beziehung Ausdruck-Bezeichnung (Sprachgegenstand). Die zweite, nämlich Ausdruck-Bedeutung, steht nicht zur Diskussion.

## 2.2 Objektsprache und Metasprache

Im Aufbau einer wissenschaftlichen Semantik ist die Differenzierung zwischen verschiedenen Sprachstufen unentbehrlich. Die Sprache, die untersucht werden soll, liegt semantisch nicht auf der gleichen Stufe wie die Sprache, in der man die Untersuchung durchführt. Tarski hat 1933 als erster systematisch diese Unterscheidung eingeführt.

Unter *Objektsprache* versteht er die «Sprache, von der wir sprechen» und unter *Metasprache* die «Sprache, in der wir sprechen»<sup>16</sup>. Ein Bei-

<sup>13</sup> Zur Begriffsgeschichte siehe A. W. READ: An account of the word «semantics». In: Word 4 (1948) 78–97. Ferner das Stichwort «Semantica» in: Enciclopedia Filosofica. Venezia-Roma 1957.

<sup>14</sup> TARSKI 1936, 1.

<sup>15</sup> TARSKI 1936, 1.

<sup>16</sup> TARSKI 1935, 281–282.

spiel <sup>17</sup>: Wenn wir behaupten «Das 'Dromedar' ist ein Substantiv mit drei Silben», so meinen wir mit «Dromedar» sicher nicht das vierbeinige Wüstentier, das mit dem Kamel verwandt ist, sondern den Ausdruck (das Wort), der aus diesen und diesen Buchstaben zusammengesetzt ist. Deshalb haben wir den Ausdruck auch in Anführungszeichen gesetzt. «Dromedar» wird metasprachlich gebraucht <sup>18</sup>, wir sagen etwas über das Wort aus. Hingegen meinen wir im Satz «Das Dromedar ist in der Wüste ein unentbehrliches Verkehrsmittel» mit «Dromedar» das Tier selber und nicht etwa das Wort mit den acht Buchstaben. Wir verwenden das Wort «Dromedar» objektsprachlich.

Gegenstand einer semantischen Untersuchung ist also die Objektsprache, und zwar kann es grundsätzlich eine beliebige Sprache sein. Wir könnten auch einen Begriff der Metasprache selbst untersuchen. Damit wird die vorherige Metasprache jetzt zur Objektsprache, nämlich zur Sprache, über die wir sprechen. Die Untersuchung aber führen wir in einer neuen Metasprache, einer Metasprache höherer Stufe (Meta-Metasprache) <sup>19</sup>.

### 2.3 Der Wahrheitsbegriff und die Antinomie des Lügners

Eine sachlich zutreffende und gleichzeitig auch formal korrekte Definition des Ausdrucks «wahre Aussage» ist nur möglich, wenn eine klare Trennung der zwei Sprachstufen eingeführt wird.

Ausgangspunkt ist die klassische, aristotelische Theorie der Wahrheit. Danach ist ein Satz dann und nur dann wahr, wenn er sagt, was der Fall ist. So ist der Satz «Es regnet» dann und nur dann wahr, wenn es regnet. Mit einem Satzschema sagen wir allgemein:

$x$  ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn  $p$  (wobei « $x$ » für den Namen einer beliebigen Aussage und « $p$ » für die betreffende Aussage selber steht). Diese Formulierung scheint unbestreitbar. Und

<sup>17</sup> Wenn wir für die Beispiele keine Verweise angeben, stammen sie von uns.

<sup>18</sup> Wir sagen auch, der Ausdruck steht in materieller Supposition und setzen ihn zwischen Anführungszeichen. Brauchen wir einen Ausdruck objektsprachlich, so steht er in formeller Supposition und wird ohne Anführungszeichen geschrieben. – Diese Terminologie (und auch die Theorie) geht auf die Scholastik zurück.

<sup>19</sup> Es ließe sich so eine ganze Hierarchie von Sprachen aufbauen. Das hat aber keinen großen Sinn. Wichtig ist nur, daß jede Sprache, auch die (vorherige) Metasprache, zur Objektsprache werden kann.



doch läßt sich daraus ohne weiteres ein Widerspruch ableiten, die sogenannte Antinomie des Lügners <sup>20</sup>.

Nehmen wir den Satz:

(1) Die auf Seite 460 Zeile 4 geschriebene Aussage ist nicht wahr. Wir kürzen Satz (1) symbolisch mit dem Buchstaben «s» ab. Gemäß unserem allgemeinen Satzschema (s. oben) ergibt sich:

(2) «s» ist dann und nur dann wahr, wenn die auf Seite 460 Zeile 4 geschriebene Aussage nicht wahr ist.

Andererseits können wir nach der Bedeutung von «s» sagen:

(3) «s» ist identisch mit der auf Seite 460 Zeile 4 geschriebenen Aussage.

Gemäß (3) ersetzen wir in (2) den Ausdruck «Die auf Seite 460 Zeile 4 geschriebene Aussage» durch den Buchstaben «s» und wir erhalten:

(4) «s» ist dann und nur dann wahr, wenn «s» nicht wahr ist.

Damit sind wir in einen offenkundigen Widerspruch geraten. Der Grund dafür liegt in der «semantischen Geschlossenheit» der gebrauchten Sprache, d. h. Objektsprache und Metasprache werden nicht auseinandergelassen <sup>21</sup>. Die betreffende Sprache enthält nicht nur ihre eigenen Ausdrücke («die», «Zeile», «Seite»), sondern auch die Namen ihrer Ausdrücke und semantische Begriffe («wahr»).

Wollen wir den Begriff der wahren Aussage sachlich zutreffend und formal korrekt definieren, dann müssen wir uns einem Sprachsystem zuwenden, das zwischen den beiden Sprachstufen deutlich differenziert.

### 3. Das System der Metasprache

#### 3.1 Die Grundlage zur metasprachlichen Definition des Wahrheitsbegriffes

Eine Metasprache läßt sich nicht ein für allemal aufstellen, denn ihr Aufbau ist abhängig von der Objektsprache und den zu analysierenden Begriffen. Was sich gleichbleibt, das sind bestimmte Arten von Grundausdrücken und Axiomen, nämlich gewisse logische Ausdrücke, dann die zu untersuchenden Ausdrücke und schließlich einige spezifisch beschreibende Ausdrücke <sup>22</sup>:

<sup>20</sup> Wir führen die Antinomie an, wie sie in TARSKI 1944, 58 formuliert ist. Vgl. auch TARSKI 1935, 270–271 und 275.

<sup>21</sup> Ausführlicher in TARSKI 1944, 59.

<sup>22</sup> Knappe Darstellung in TARSKI 1936, 3 und 1944, 60–16 (nur die Grundausdrücke). Ausführlicher in TARSKI 1935, 284–285, 329–331 und 285–289 (Grund-

## (A) Grundaussprüche

- (1) *Allgemein-logische Aussprüche*. Sie kommen in jeder Sprache vor und sind unentbehrlich.
- (2) *Aussprüche der Objektsprache*. Sie bezeichnen Gegenstände und Sachverhalte (im weitesten Sinne), von denen in der untersuchten Sprache die Rede ist.
- (3) *Strukturell-deskriptive Aussprüche* (Aussprüche aus der Morphologie der Sprache). Es sind Namen, die gewisse Aussprüche beschreiben. Wir brauchen sie, um die in (A. 2) genannte Sprache untersuchen d. h. einzelne Aussprüche und ihre Eigenschaften bezeichnen zu können.

## (B) Axiome (entsprechend zu [A])

- (1) Allgemein-logische Axiome. Sie können einem genügend ausgebauten System der mathematischen Logik entnommen werden.
- (2) Axiome der untersuchten Theorie.
- (3) Strukturell-deskriptive Axiome.

Weil in der Objektsprache stets einige allgemein-logische Aussprüche vorkommen, decken sich (A.1) und (A. 2) teilweise, ebenso (B.1) und (B. 2). Sie fallen sogar zusammen, wenn die mathematische Logik oder ein Teil davon Gegenstand der Untersuchung ist. So etwa beim Klassenkalkül, der Objektsprache, an der Tarski seine Untersuchung über den Wahrheitsbegriff weiterführt. Dadurch vereinfacht sich die Metasprache auf

- (1) Allgemein-logische Aussprüche (bzw. Axiome) und
- (2) Strukturell-deskriptive Aussprüche (bzw. Axiome).

Wir gehen hier weder auf die Einzelheiten des Klassenkalküls noch auf die der entsprechenden Metasprache ein. Die Tabelle auf der folgenden Seite faßt die wichtigsten Zeichen in einer Übersicht zusammen. Es geht uns vor allem darum, die Entsprechung zwischen den beiden Sprachstufen aufzuzeigen.

Innerhalb dieses semantischen Systems gelingt es Tarski, den Wahrheitsbegriff zu definieren. Damit die Definition für zutreffend gehalten wird, hat sie die folgenden zwei Bedingungen zu erfüllen: Sie muß (1) aus

aussprüche und Axiome). Ist der Klassenkalkül Objektsprache, so vereinfacht sich das System: TARSKI 1935, 284–289, 375, 285–289. – STEGMÜLLER 1957, 55–56 gruppiert die Aussprüche der Metasprache nach anderen Gesichtspunkten: (1) Nicht-semantischer Teil, entspricht unten (A. 1) und (A. 2); (2) Semantischer Teil, entspricht (A. 3). Diese Einteilung hat den Vorteil, daß sie den speziellen, bereits metasprachlichen Charakter von (A. 3) deutlich hervorhebt.



Tabelle zu den Zeichen der Objektsprache und der Metasprache

Sprachstufe:	Objektsprache (d. h. Klassenkalkül)		Metasprache (d.h. Metaklassenkalkül)				
	allgemein-logische		strukturell-deskriptive				
Art d. Zeichen:	Name des Ausdrucks	Sym- bol	Inter- pretation	Ausdruck	Name des Ausdrucks	Ab- kürzung	Sym- bol
Konstanten:	Inklusionszeichen	<i>I</i>	ist in... enthalten	ist in... enthalten	das Inklusionszeichen	<i>in</i>	<i>i</i>
	Negationszeichen Zeichen der logischen Summe Allzeichen	<i>N</i> <i>A</i> <i>II</i>	nicht oder für ein beliebiges	nicht oder für ein beliebiges	das Negationszeichen das Zeichen der logischen Summe das Allzeichen	<i>ng</i> <i>sm</i> <i>al</i>	— + ∩
Variablen:	Variable	<i>x</i> , <i>x</i> „ (u.ä.)			Namen von Klassen von Individuen Namen von Folgen solcher Klassen Namen von natürlichen Zahlen oder Folgen von natürlichen Zahlen		<i>a b</i>      <i>f g h</i>
	Variable <i>k</i> <sup>ter</sup> Gestalt				Namen von Ausdrücken oder von Folgen von Ausdrücken Namen von Klassen von Ausdrücken die Variable <i>k</i> <sup>ter</sup> Gestalt	<i>vk</i>	<i>k l m n p</i>      <i>t u w x y z</i>      <i>X Y</i>

dem Schema « $x$  ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn  $p$ » gewonnen werden können und (2) eine (sinnvolle) Aussage sein <sup>23</sup>.

Die Aussage wird als Sonderfall der Aussagefunktion betrachtet, nämlich als eine Aussagefunktion ohne freie Variable <sup>24</sup>. Als Grundfunktion im eingeschränkten Klassenkalkül gilt die Inklusion. Bereits die Inklusion (a) ist eine Aussagefunktion. Weitere Aussagefunktionen erhalten wir, wenn wir die Grundoperationen auf die Inklusion anwenden, nämlich das Negieren (b), das logische Addieren (c) oder das Generalisieren (d). Gebrauchen wir zur Formulierung die strukturell-deskriptiven Termini, so lautet die Definition <sup>25</sup>:

Def. 1 (10). « $x$  ist eine *Aussagefunktion* dann und nur dann, wenn  $x$  ein Ausdruck ist, welcher eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt: (a) es gibt solche natürliche Zahlen  $k$  und  $l$ , daß  $x = \iota_{k,l}$ ; (b) es gibt eine solche Aussagefunktion  $y$ , daß  $x = \bar{y}$ ; (c) es gibt solche Aussagefunktionen  $y$  und  $z$ , daß  $x = y + z$ ; (d) es gibt eine solche natürliche Zahl  $k$  und eine solche Aussagefunktion  $y$ , daß  $x = \bigcap_k y$ ».

Der Unterschied der Aussage gegenüber der Aussagefunktion zeigt sich darin, daß in der Aussage keine freie Variable vorkommt:

Def. 2 (12). « $x$  ist eine *Aussage* (oder eine *sinnvolle Aussage*) – symbolisch  $x \in As$  – dann und nur dann, wenn  $x$  eine Aussagefunktion ist und wenn dabei keine Variable  $v_k$  eine freie Variable der Funktion  $x$  ist».

Hier stellt sich ein Problem. Die zusammengesetzten Aussagen sind nicht immer Verknüpfungen von einfachen Aussagen <sup>26</sup>. Deshalb gilt die rekursive Definition <sup>27</sup>, wie sie oben für die Aussagefunktion angegeben wurde, nicht für jede Aussage. In der Aussage werden die

<sup>23</sup> Vgl. TARSKI 1935, 305–306 (Konvention W). – Der folgende Text des Abschnittes 3.1 und 3.2 kann überschlagen werden. Es wird aufgrund des eingeschränkten Klassenkalküls der Weg zur Definition des Wahrheitsbegriffes aufgezeigt.

<sup>24</sup> Vgl. TARSKI 1935, 333, 295 (Def. 12). – Wir setzen voraus, daß die gebräuchlichsten Termini der mathematischen Logik (Aussagefunktion, Variable, Existenzoperator u. a.) bekannt sind. Zur allgemeinen Information siehe J. M. BOCHENSKI und A. MENNE: Grundriß der Logistik. Paderborn <sup>3</sup>1965.

<sup>25</sup> Zur Bedeutung der einzelnen Ausdrücke siehe die Zeichen-Tabelle. – Wir numerieren die Definitionen fortlaufend und geben Tarskis Numerierung (nach TARSKI 1935) nur in Klammer an. Statt  $\alpha$ )  $\beta$ ) ... schreiben wir a) b) ...

<sup>26</sup> Vgl. TARSKI 1935, 307 und 1944, 63.

<sup>27</sup> Eine rekursive Definition müßte z. B. die zusammengesetzten Aussagen auf ihre einzelnen Elemente, d.h. auf elementare Aussagen zurückführen. Def. 1 führt die Aussagefunktion auf die Grundfunktion (a) und die drei Grundoperationen (b), (c) und (d) zurück.

Variablen durch den All- bzw. Existenzoperator gebunden. Bei der Zerlegung müßte eine unendliche Reihe von Konjunktionen (beim Alloperator) oder Disjunktionen (beim Existenzoperator) angeführt werden. In einer Sprache mit nur endlich vielen Aussagen wäre es (abgesehen von der rekursiven Definition) sogar möglich, in der Definition der wahren Aussage alle vorkommenden Aussagen einfach aufzuzählen. In unserem Fall aber wird die Anzahl der logischen Operationen (a)–(d) nicht beschränkt, d. h. es sind unendlich viele Aussagen möglich. Wie brauchen demnach einen Begriff, der uns einerseits zwischen Aussagefunktion und Aussage vermittelt und andererseits zum Begriff der Wahrheit führt. Das ist der Begriff der Erfüllung<sup>28</sup>.

### 3.2 Der Begriff der Erfüllung

Tarski versteht die Erfüllung als eine zweistellige Beziehung zwischen gewissen Gegenständen und Aussagefunktionen. Eine Aussagefunktion wird erfüllt durch Gegenstände bzw. im Klassenkalkül durch Klassen von Individuen. So erfüllt z. B. der Schnee die Aussagefunktion « $x$  ist weiß»<sup>29</sup>. Allgemein formuliert: Für jedes  $a - a$  erfüllt die Aussagefunktion  $x$  dann und nur dann, wenn  $p$  (wobei für « $x$ » der Name einer bestimmten Aussagefunktion und für « $p$ » die Aussagefunktion selber einzusetzen ist). Handelt es sich um eine Aussagefunktion mit beliebigen freien Variablen, dann sprechen wir nicht von Gegenständen, die die Aussagefunktion erfüllen, sondern von einer unendlichen Folge<sup>30</sup> von Gegenständen.

Ebenso wie die Aussagefunktion in Def. 1 läßt sich auch der Begriff der Erfüllung rekursiv definieren, da er ja für die Aussagefunktion gilt. Wir geben an, wie sich der Begriff bei der Inklusion und bei der Anwendung der Grundoperationen verhält:

Def. 3 (22). «Die Folge  $f$  erfüllt die Aussagefunktion  $x$  dann und nur dann, wenn  $f$  eine unendliche Folge von Klassen und  $x$  eine Aussagefunktion ist, welche eine von den vier folgenden Bedingungen erfüllen

<sup>28</sup> STEGMÜLLER 1957, 66 macht darauf aufmerksam, daß in der Logik gewöhnlich die Erfüllung aufgrund des Wahrheitsbegriffes bestimmt wird. In der Semantik von Tarski ist das Verhältnis gerade umgekehrt: Auf der Grundlage des Begriffes der Erfüllung gelangen wir zum Wahrheitsbegriff.

<sup>29</sup> Vgl. TARSKI 1935, 308.

<sup>30</sup> Zur Einführung des Unendlichkeitsbegriffes siehe TARSKI 1935, 290–291, 313, (Anm. 43), 346–347. TARSKI 1944, 81 (Anm. 15). Wir gehen in unserer Darstellung nicht darauf ein.

(a) es gibt solche natürliche Zahlen  $k$  und  $l$ , daß  $x = \iota_{k,l}$  und  $f_k \subset f_l$ ;  
 (b) es gibt eine solche Aussagefunktion  $y$ , daß  $x = \bar{y}$  und  $f$  die Funktion  $y$  nicht erfüllt; (c) es gibt solche Aussagefunktionen  $y$  und  $z$ , daß  $x = y + z$  und daß  $f$  entweder  $y$  oder  $z$  erfüllt; (d) es gibt eine solche natürliche Zahl  $k$  und eine solche Aussagefunktion  $y$ , daß  $x = \bigcap_k y$  und daß hierbei jede unendliche Folge von Klassen, die sich von  $f$  höchstens an der  $k^{\text{ten}}$  Stelle unterscheidet, die Funktion  $y$  erfüllt».

Nun stellt sich der Definition der wahren Aussage kein Hindernis mehr in den Weg. Auch für die Def. 3 gilt, daß die Aussage ein Sonderfall der Aussagefunktion ist. Ob nun eine Folge  $f$  eine Aussagefunktion erfüllt, hängt nur von jenen Gliedern ab, die den freien Variablen der Aussagefunktion entsprechen. In der Aussagefunktion « $\Pi x, Ix, x, ,$ » ist « $x, ,$ » eine freie Variable. Ob nun die Folge  $f$  die Aussagefunktion  $\bigcap_2 \iota_{1,2}$  (strukturell-deskriptiver Name der genannten Aussagefunktion) erfüllt, hängt von den Gliedern der Folge  $f_1$  ab, d.h. davon, ob die Glieder der Folge  $f_1$  diese Aussagefunktion erfüllen.

In der Aussage hängt die Erfüllung nicht mehr von den einzelnen Gliedern dieser Folge ab, denn es kommen keine freien Variablen vor. Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten: die Aussage wird entweder von jeder Folge erfüllt oder von keiner<sup>31</sup>. Ob die Folge  $f$  von Städten Zürich-Prag-Luzern-Genf-London die Aussagefunktion « $x$  ist eine Stadt in der Schweiz» erfüllt, hängt von den aufgezählten Städten ab, von den einzelnen Gliedern, die der Folge zugerechnet werden. Zürich erfüllt die Aussagefunktion, ebenso Luzern und Genf, nicht aber Prag oder London. Wird die freie Variable (« $x$ ») gebunden, etwa durch den Existenzoperator (Partikularisation), dann erfüllt die Folge  $f$  die Aussagefunktion (bzw. Aussage) oder sie erfüllt sie nicht. Entweder gibt es unter den Gliedern der Folge  $f$  wenigstens ein Glied, das eine Stadt in der Schweiz ist, oder es gibt kein solches Glied. Wenn ja, wie in diesem Fall, dann ist die Aussage wahr. Bei der Bindung der freien Variable durch den Alloperator (Generalisation) bieten sich genau die zwei gleichen Möglichkeiten. Entweder gilt für alle aufgezählten Städte, daß die Städte in der Schweiz sind, oder es gilt nicht für alle Städte. Bei der Generalisation gilt das nicht für alle Städte unserer Folge, also ist die Aussage falsch.

Weil die Aussage (Aussagefunktion ohne freie Variable) stets entweder von jeder Folge (wahr) oder von keiner (falsch) erfüllt wird, läßt sich die wahre Aussage so definieren:

<sup>31</sup> Vgl. TARSKI 1935, 313.

Def. 4 (23). « $x$  ist eine *wahre Aussage* – symbolisch  $x \in Wr$  – dann und nur dann, wenn  $x \in As$  und wenn jede unendliche Folge von Klassen  $x$  erfüllt».

Es müssen also die Bedingungen der weiter oben erwähnten Def. 2 (Aussage) und Def. 3 (Erfüllung) gegeben sein.

### 3.3 *Problem und Ergebnis*

Es hat sich gezeigt, daß der Begriff der wahren Aussage im eingeschränkten Klassenkalkül genau definiert werden kann. Sobald wir andere formalisierte Sprachen heranziehen, stellt sich ein neues Problem. Der Wahrheitsbegriff bzw. die Semantik (die auf dem Wahrheitsbegriff aufbaut) läßt sich nämlich nur dann widerspruchsfrei konstruieren, wenn die Metasprache in ihrem Wortschatz reicher ist als die Objektsprache. Das ist jedoch nicht bei allen Sprachen der Fall.

Im folgenden Abschnitt führen wir Tarskis Begriff der semantischen Kategorie und der Ordnung ein und gruppieren unter diesem Gesichtspunkt die verschiedenen Sprachen. Anschließend erklären wir, was unter dem Reichtum einer Sprache zu verstehen ist.

#### 3.31 *Sprachen endlicher und unendlicher Ordnung*

Formal spielt die *semantische Kategorie*<sup>32</sup> in der Semantik die gleiche Rolle wie der Typus in der Logik<sup>33</sup>. Inhaltlich kann sie am ehesten mit den Wortarten der Grammatik verglichen werden. Ausdrücke gehören dann zur selben semantischen Kategorie, wenn sie füreinander eingesetzt werden können, und wenn dabei der ganze Ausdruck im betreffenden System sinnvoll bleibt. Ersetzen wir beispielsweise im Satz «Dora fährt weg» den Ausdruck «fährt weg» durch «sonnig» oder durch «Skorpion», so ergibt sich daraus kein sinnvoller Satz. Ersetzen wir hingegen «fährt weg» durch «denkt nach», so bleibt der Satz sinnvoll (wahr oder falsch). «Wegfahren» und «nachdenken» gehören beide zur selben semantischen Kategorie, «wegfahren», «sonnig» und «Skorpion» zu je verschiedenen.

Die *Ordnung* der Variablen in der Semantik entspricht der Stufe der

<sup>32</sup> Wie Tarski betont, hat er diesen Begriff von E. Husserl übernommen, siehe TARSKI 1935, 335. Heute spricht man eher von «syntaktischer Kategorie». Siehe dazu J. M. BOCHENSKI: On syntactical Categories. In: The New Scholasticism 23 (1949) 257–280. Y. BAR-HILLEL: On Syntactical Categories. In: The Journal of Symbolic Logic 15 (1950) 1–16.

<sup>33</sup> Vgl. TARSKI 1935, 335. Vgl. auch STEGMÜLLER 1957, 75–76.



Variablen in der Logik<sup>34</sup>. Ausdrücke für Individuen oder für ihre Variablen gehören zur ersten Ordnung, so etwa «*a*» oder «*b*» in unserem System. Funktoren mit Argumenten erster Ordnung gehören zur zweiten Ordnung, z. B. «*R*» in «*aRb*» («*R*» ist die Relation, die zwischen den beiden Gliedern *a* und *b* besteht). Allgemein sagen wir, daß ein Funktor dann zur  $n+1^{\text{ten}}$  Ordnung gehört, wenn wenigstens eines seiner Argumente von höchstens  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ist<sup>35</sup>. Bei der Definition des Wahrheitsbegriffes ist es ausschlaggebend, ob die Anzahl der Ordnungen der Variablen endlich oder unendlich ist.

Nach diesen zwei Gesichtspunkten, der semantischen Kategorie und der Ordnung, unterscheidet Tarski vier Arten von Sprachen<sup>36</sup>:

- (1) Alle Variablen gehören zur gleichen (und einzigen) semantischen Kategorie. Beispiel: eingeschränkter Klassenkalkül (s. die Tabelle).
- (2) Die Variablen gehören zu (nur) endlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien. Beispiel: Kalkül der zweigliedrigen Relationen.
- (3) Die Variablen gehören zu unendlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien, bleiben aber innerhalb einer endlichen Ordnung. Beispiel: Kalkül der mehrgliedrigen Relationen.
- (4) Die Variablen gehören zu unendlich vielen verschiedenen semantischen Kategorien und auch zu unendlich vielen verschiedenen Ordnungen. Beispiel: ausgebauter Klassenkalkül.

(1), (2) und (3) werden «Sprachen endlicher Ordnung» und (4) «Sprachen unendlicher Ordnung» genannt.

Für Sprachen endlicher Ordnung läßt sich der Wahrheitsbegriff widerspruchsfrei und sachlich richtig definieren. Das geschieht über den Begriff der Erfüllung (sofern natürlich die Sätze nicht einzeln aufgezählt werden können, d. h. wenn die Anzahl der möglichen Sätze nicht begrenzt ist). Für die Sprachen (2) und (3) muß zusätzlich die «Methode der semantischen Vereinheitlichung der Variablen»<sup>37</sup> angewendet werden: Die mehrgliedrigen Relationen müssen in einer einheitlichen semantischen Kategorie zusammengefaßt werden (zur Formulierung bes. der Def. 3). In den Sprachen (4) ist die Ordnung der Variablen nicht mehr begrenzt. Damit wird es aber unmöglich, in der Metasprache Variablen von noch höherer oder mindestens gleicher Ordnung zu finden. Der Begriff der Erfüllung (folglich auch der Wahrheitsbegriff) verliert so

<sup>34</sup> Vgl. STEGMÜLLER 1957, 75–76.

<sup>35</sup> Vgl. TARSKI 1935, 338.

<sup>36</sup> Vgl. TARSKI 1935, 340–341.

<sup>37</sup> Vgl. TARSKI 1935, 343–358, bes. aber 348–352.



seine Eindeutigkeit, und die bekannte Antinomie kommt erneut zum Vorschein. Hingegen läßt sich die Definition durchführen, wenn wir uns auf ein Teilsystem der Objektsprache beschränken, in dem die Variablen die endliche Ordnung nicht überschreiten. Oder der Wahrheitsbegriff muß als undefinierter Grundbegriff eingeführt werden.

### 3.32 Ergebnis

Bedingung zur Definition des Wahrheitsbegriffes ist, daß im betreffenden Sprachsystem die Metasprache wesentlich reicher ist als die Objektsprache, d. h. die Variablen der Metasprache müssen einem logisch höheren Typus angehören. Dieses Ergebnis gilt sogar für Sprachen, in denen das Prinzip der semantischen Kategorie und die Unterscheidung nach endlicher und unendlicher Ordnung keine Rolle mehr spielt<sup>38</sup>. Es bedeutet dann, daß die Definition nicht innerhalb des Systems der Objektsprache aufgestellt werden kann, sondern nur in einer Metasprache, deren Ordnung größer ist als die der Objektsprache. Eine Bestätigung und positive Ergänzung des Unentscheidbarkeitssatzes von Gödel.

Der Sinn dieser Folgerung wird klar, wenn wir bedenken, daß in der Metasprache Aussagen über eine bestimmte Sprache gemacht werden. Die Ausdrücke der Objektsprache werden nicht bloß angeführt, sie werden untersucht, analysiert. Dazu muß eine genügende Grundlage an logischen Ausdrücken vorhanden sein.

Die Untersuchungen zur Semantik zeigen, daß (1) zwischen zwei Sprachstufen zu unterscheiden ist, und daß (2) der Wortschatz der Metasprache genügend reich sein muß. Tarskis Verdienst ist es zudem, seine semantische Forschung axiomatisiert und formalisiert zu haben.

## 4. Die Bedeutung der Semantik

Die Bedeutung der Semantik ist heute durchaus nicht unbestritten<sup>39</sup>. Sie ist aber weder ein Allerweltsheilmittel noch Wortspielerei

<sup>38</sup> Vgl. TARSKI 1935, 393–405.

<sup>39</sup> Als Beispiel führen wir einen der polemischen Ausfälle von K. WEINBERG an: «Mit einer Misologie, die allem Risiko, aller Spekulation und aller Synthese feindlich gesinnt ist, widmen selbst die besseren unter den alten Herren der Wiener Schule, wie z. B. Rudolf Carnap, dem Problem einer universellen 'Metasprache' (*metalanguage*) dicke und schlecht geschriebene Bücher, deren Inhalt nicht weniger barbarisch als die zweisprachige Zusammensetzung des Wortungeheuers *metalanguage* ist». (Sprache und Realität. In: Sprache im technischen Zeitalter, 29 (1969) 71–72.) Der Autor kennt scheinbar das Ziel solcher Untersuchungen nicht!

oder ein bloßer Kniff, um unerwünschte Aussagen als unsinnig hinzustellen<sup>40</sup>. Welche Leistungen kann sie vorzeigen?

Einen wichtigen Beitrag leistet sie zweifellos an die *deduktiven Wissenschaften*. Aus der Definition des Wahrheitsbegriffes ergeben sich weitere Folgerungen: Es lassen sich das Nichtwiderspruchsprinzip und das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ableiten, die Beziehung zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit und das Problem der Vollständigkeit untersuchen<sup>41</sup>.

Die Anwendungsmöglichkeit auf die *übrigen Wissenschaften* ist erwartungsgemäß geringer<sup>42</sup>. Sie verwenden vielfach die natürlichen Sprachen. Die Semantik aber (wie sie Tarski und Carnap verstehen) weist ihre größten Erfolge innerhalb der formalisierten Sprachen auf. Nur dort ist eine exakte und wirklich widerspruchsfreie Untersuchung möglich.

Die formalisierte Sprache steht jedoch nicht ohne Bezug zur Umgangssprache. Sie kann als Nachkonstruktion größerer oder kleinerer Teilausschnitte aus ihr gesehen werden. Was Frege über seine Begriffsschrift sagt, das gilt auch hier: Die formalisierte Sprache verhält sich zur Umgangssprache wie das Mikroskop zum Auge<sup>43</sup>. Sie ergänzen einander, aber sie ersetzen sich nicht. Ihr Anwendungsbereich ist verschieden.

Noch kurz ein Wort zum Verhältnis von *Semantik und Ontologie*<sup>44</sup>. Die Semantik ist in erster Linie nicht eine ontologische Theorie, sondern eine Methode. Das zeigt sich schon darin, daß grundsätzlich jede beliebige Sprache untersucht werden kann, wenn auch nicht überall in gleicher Strenge. In bezug auf die Sprachstufe läßt sich der Unterschied so zusammenfassen: Die Ontologie analysiert das Seiende als Seiendes, das worüber die Sprache spricht. Sie ist objektsprachlich. Die Semantik

<sup>40</sup> Vgl. TARSKI 1944, 56.

<sup>41</sup> Siehe TARSKI 1935, 302–303 (Def. 18–20), 316–317 (Satz 1–7). TARSKI 1944, 64 und 77–78.

<sup>42</sup> Siehe TARSKI 1944, 74–75.

<sup>43</sup> G. FREGE: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879. Vgl. S. v.

<sup>44</sup> Zum Thema Ontologie und Semantik siehe R. CARNAP: Empiricism, Semantics, and Ontology (in: *Revue Internationale de Philosophie* IV/11 (1950) 20–40). G. HASENJAEGGER: Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik. Freiburg-München 1962, 29–51 (Logik als Ontologie), 52–73 (Logik als Sprachtheorie). R. M. MARTIN: On Ontology and the Province of Logic: Some Critical Remarks. In: A.-T. TYMIENECKA (ed.): *Contributions to Logic and Methodology in Honor of J. M. Bochenski*. Amsterdam 1965, 272–289, bes. 283–284 (dort sind auch weitere Literatur-Angaben zu finden).

dagegen liegt auf der Stufe der Metasprache, sie untersucht eine Sprache, bestimmte Ausdrücke. Die Ontologie spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle. Erst bei der Interpretation und Begründung bestimmter Begriffe (etwa der Klasse oder des Prädikates) wird die ontologische Theorie wichtig. Der eigentliche Schnittpunkt zwischen Ontologie und Semantik liegt im Universalienproblem <sup>45</sup>.

Von der heutigen Semantik gehen viele fruchtbare Impulse auf philosophische Fragestellungen aus, eine Reihe von Problemen wird neu und bestimmter formuliert <sup>46</sup>. Auch der Theologie eröffnet sich damit ein neues Problemgebiet <sup>47</sup>. Aufgabe der Semantik ist das «Klarwerden von Sätzen» und die deutliche Formulierung der Gedanken. Und oft zeigt sich, daß «Unklarheit Tiefe vorspiegeln kann, Klarheit eine vorhandene Tiefe geringer erscheinen läßt» <sup>48</sup>. Probleme werden nicht durch eine schöne Sprache gelöst, sondern durch ein klares Denken.

#### LITERATUR-HINWEISE

Wir führen hier lediglich die vollständigen Titel jener Werke an, die im vorhergehenden abgekürzt (Autor und Erscheinungsjahr) zitiert werden.

CARNAP, R., 1942: *Introduction to Semantics*. Cambridge, Mass. <sup>3</sup>1948.

STEGMÜLLER, W., 1957: *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap*. Wien-New York <sup>2</sup>1968.

TARSKI, A., 1935: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. In: *Studia philosophica (Leopoli)* 1 (1935) 261–405 (aus dem Polnischen (1933), mit angefügtem Nachwort). – Nachdruck in: F. RIVETTI BARBÒ: *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo da Peirce a Tarski. Studi, testi, bibliografia*. Milano 1961, 392–677. (Englisch in: TARSKI 1956.)

<sup>45</sup> Zur Diskussion um das Universalienproblem siehe J. M. BOCHENSKI, A. CHURCH, N. GOODMAN: *The Problem of Universals. A Symposium*. Notre Dame/Indiana 1956. G. KÜNG: *Ontologie und logistische Analyse der Sprache. Eine Untersuchung zur zeitgenössischen Universalien Diskussion*. Wien 1963. W. STEGMÜLLER (Hrsg.): *Das Universalienproblem. (Wege der Forschung Bd. LXXXIII)* Darmstadt (in Vorbereitung. Mit Beiträgen von P. Bernays, R. Carnap, R. L. Cartwright, A. Church, N. Goodman, W. V. Quine, F. P. Ramsey, H. Wang, u.a.).

<sup>46</sup> J. M. BOCHENSKI: *Logisch-philosophische Studien. Mit Aufsätzen von P. Banks, A. Menne und I. Thomas*. Übersetzt und herausgegeben von A. Menne. Freiburg–München 1959.

<sup>47</sup> J. M. BOCHENSKI: *The Logic of Religion*. New York 1965. (Deutsch: *Logik der Religion*. Köln 1968).

<sup>48</sup> G. PATZIG, im Nachwort zu R. Carnap: *Scheinprobleme in der Philosophie. Das Fremdpsychische und der Realismustreit*. Frankfurt a.M. 1966, 135.

- TARSKI, A., 1936: Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik. In: Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Paris 1935, T. 3 (1936), 1–8. (Englisch in: TARSKI 1956.)
- TARSKI, A., 1944: The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics. In: Philosophy and Phenomenological Research 4 (1944) 341–375. – Nachdruck in: H. FEIGL/W. SELLARS: Readings in Philosophical Analysis. New York 1949, 52–84. (Wir zitieren TARSKI 1944 nach diesem Nachdruck.) – Auch in: L. LINSKY: Semantics and the Philosophy of Language. Urbana, Ill. 1952 (13–47).
- TARSKI, A., 1956: Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938. Translated by J. H. WOODGER. Oxford 1956.