Theoretische Fehlerbetrachtungen an Hand eines praktischen Beispiels

Autor(en): **Leemann, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres**

Band (Jahr): **15 (1917)**

Heft 5

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-184577

question de la taxation par la conception du Bureau fédéral du Registre foncier en ce qui concerne la *revision de l'instruction fédérale.* Cette conception est consignée dans la phrase suivante:

„Toutefois en se basant sur les expériences acquises avec l'instruction sur les mensurations cadastrales de 1910, et en s'appuyant sur les calculs relatifs au coût de la mensuration de toute la Suisse, on ne peut pas constater la conclusion logique que l'instruction de 1910 doit être soumise sans retard à une revision et débarrassée de toutes les prescriptions qui, sans offrir un intérêt pratique correspondant, peuvent avoir pour conséquence une augmentation des frais de mensuration."

Theoretische Fehlerbetrachtungen an Hand eines praktischen Beispiels.

Von *W. Leemann,* Zürich.

Da gewiss mancher Leser dieser Zeitschrift an einer einlässlicheren theoretischen Behandlung eines aus der Praxis gegriffenen Beispiels Interesse nimmt, sollen nachfolgend die Ergebnisse der Polygonseitenmessung im Quartier Fluntern der Stadt Zürich fehlertheoretisch behandelt werden.

Die Messung der Polygonseiten erfolgt in Zürich mit Fünfmeterlatten nach der Staffelmethode. Im Quartier Fluntern, dessen Grundbuchvermessung zurzeit in Arbeit ist, wurde die Seitenmessung auf drei Gehülfenpaare verteilt, in der Weise, dass eine Serie von Seiten durch die Gehülfenpaare A und B, eine andere Serie durch die Paare A und C und eine dritte Serie durch die Paare B und C je doppelt, jede Seite also viermal gemessen wurde. Die Doppelmessungen desselben Paares erfolgten unmittelbar nacheinander, bei gleicher Absteckung der Seite, mit den gleichen Latten und in der gleichen Richtung (bergwärts). Die drei Gehülfenpaare führten die Messungen auf die gleiche Art und Weise aus. Die Latten wurden täglich nach Arbeitsschluss auf dem Komparator gemessen.

Zur Beurteilung der Ergebnisse wurden die Mittel der Doppelmessungen jedes Gehülfenpaares gebildet und die korrespondierenden Mittel der Paare A und B, A und C, B und C nebeneinander gestellt. Hernach wurden die Differenzen A—C, A—B und C—B gebildet. An dieser Stelle sollen nur die Unterschiede A—C vorgeführt und einlässlicher betrachtet werden.

Durchgeht man in der beifolgenden Tabelle (Seite 135) die in der vierten Vertikalkolonne enthaltenen Differenzen d, so findet man, dass das positive Vorzeichen sehr stark überwiegt und insbesondere die grösseren d positives Vorzeichen haben. Dieser Umstand weist deutlich auf das Vorhandensein regelmässiger Fehler hin. Es ist bekannt, dass infolge des Durchbiegens der Latten und wegen ihrer Abweichung von der Horizontalen und der Messrichtung die Messungen stets zu lang erhalten werden. Ausser diesen regelmässigen Fehlern sind ferner diejenigen zu nennen, welche persönlicher Natur sind, weil sie von der Art des Ablotens abhängig sind und zur Folge haben, dass ein Gehülfe entweder regelmässig zu lang oder zu kurz misst. Es geht daraus hervor, dass die Messungen der drei Gehülfenpaare mit verschieden grossen, regelmässigen Fehlern behaftet sein müssen. Der regelmässige Charakter der Differenzen d findet also eine ganz natürliche Erklärung.

Vergleicht man die einzelnen d mit der Toleranz der eidgenössischen Vermessungsinstruktion $T = 0{,}003 \sqrt{s} + 0{,}0001 \,.\, s$, so findet man, dass diese nirgends auch nur annähernd erreicht wird. Die relativ grösste Differenz zeigt sich bei der grössten Seite zu +15 mm oder 40 % des Toleranzwertes.

An dieser Stelle soll eine Bemerkung zur eidgenössischen Toleranzformel eingeschaltet werden. Dieselbe nimmt keine Rücksicht auf das *Vorzeichen* des Fehlers und es müsste daher der oben herausgegriffene Fehler von 15 mm auch dann nicht beanstandet werden, wenn er negatives Vorzeichen hätte, obgleich in diesem Falle mit Sicherheit auf eine Störung in den betreffenden Messungen geschlossen werden könnte. Um diesem Mangel der eidgenössischen Toleranz auszuweichen, führe ich die Untersuchungen des regelmässigen und zufälligen Fehlers getrennt durch.

Der den Differenzen d anhaftende regelmässige Fehler wird, unter Vernachlässigung des konstanten Anlege- und Ablesefehlers und unter der Annahme, dass der zufällige Messungsfehler mit $\sqrt{s}$ wachse, bekanntlich so bestimmt, dass die Messungen A und C für sich summiert werden und dann der

Lfd. Nr.	1. Polygon-seite	2. Messung A Meter	3. Messung C Meter	4. A—C = d mm	5. — r'. s mm	6. v = d — r'. s mm	7. $\frac{v}{\sqrt{s}}$ = v' mm	8. v'² mm		9. v' d. Grösse nach geordnet mm
	P. P. P. P.									
1	305—306	18,796	18,795	+ 1	— 1,1	— 0,1	— 0,02	0,000		0,00
2	291—295	19,635	19,635	± 0	— 1,1	— 1,1	— 0,25	0,061		0,02
3	355—370	20,081	20,080	+ 1	— 1,1	— 0,1	— 0,02	0,000		0,02
4	294—295	21,948	21,946	+ 2	— 1,2	+ 0,8	+ 0,16	0,027		0,02
5	283—313	23,950	23,951	— 1	— 1,4	— 2,4	— 0,49	0,242		0,05
6	293—294	24,501	24,500	+ 1	— 1,4	— 0,4	— 0,09	0,008		0,06
7	368—369	27,173	27,170	+ 3	— 1,5	+ 1,5	+ 0,29	0,085		0,08
8	274—275	27,550	27,549	+ 1	— 1,6	— 0,6	— 0,12	0,015		0,09
9	270—△ Gl.	27,573	27,571	+ 2	— 1,6	+ 0,4	+ 0,08	0,007	1,854	0,09
10	271—293	28,193	28,190	+ 3	— 1,6	+ 1,4	+ 0,27	0,071		0,10
11	353—368	28,421	28,420	+ 1	— 1,6	— 0,6	— 0,12	0,014		0,10
12	310—311	30,405	30,403	+ 2	— 1,7	+ 0,3	+ 0,05	0,003		0,10
13	272—273	30,485	30,487	— 2	— 1,7	— 3,7	— 0,67	0,449		0,12
14	270—271	30,895	30,896	— 1	— 1,7	— 2,7	— 0,49	0,236		0,12
15	271—272	31,923	31,924	— 1	— 1,8	— 2,8	— 0,49	0,244		0,12
16	290—292	31,936	31,937	— 1	— 1,8	— 2,8	— 0,49	0,244		0,15
17	292—293	32,622	32,619	+ 3	— 1,8	+ 1,2	+ 0,21	0,043		0,16
18	370—371	34,166	34,166	± 0	— 1,9	— 1,9	— 0,32	0,105		0,21
19	259—△ B.	34,634	34,634	± 0	— 2,0	— 2,0	— 0,34	0,116		0,21
20	273—274	35,546	35,544	+ 2	— 2,0	± 0,0	± 0,00	0,000		0,21
21	355—372	36,412	36,413	— 1	— 2,1	— 3,1	— 0,51	0,264		0,22
22	323—372	37,161	37,163	— 2	— 2,1	— 4,1	— 0,67	0,452		0,24
23	281—297	38,280	38,278	+ 2	— 2,2	— 0,2	— 0,02	0,000		0,25
24	283—312	38,863	38,863	± 0	— 2,2	— 2,2	— 0,35	0,123		0,26
25	272—311	38,949	38,952	— 3	— 2,2	— 5,2	— 0,83	0,693		0,27
26	309—△ Sch.	39,065	39,065	± 0	— 2,2	— 2,2	— 0,35	0,123		0,29
27	311—312	41,036	41,038	— 2	— 2,3	— 4,3	— 0,67	0,451	3,478	0,31
28	291—292	41,361	41,357	+ 4	— 2,3	+ 1,7	+ 0,26	0,070		0,32
29	369—△ Sch.	42,141	42,138	+ 3	— 2,4	+ 0,6	+ 0,10	0,010		0,33
30	308—310	43,094	43,093	+ 1	— 2,4	— 1,4	— 0,21	0,046		0,33
31	290—296	44,105	44,099	+ 6	— 2,5	+ 3,5	+ 0,53	0,279		0,34
32	118—△ Sch.	44,386	44,381	+ 5	— 2,5	+ 2,5	+ 0,37	0,140		0,34
33	308—309	44,631	44,632	— 1	— 2,5	— 3,5	— 0,53	0,276		0,35
34	322—371	44,659	44,656	+ 3	— 2,5	+ 0,5	+ 0,06	0,004		0,35
35	272—290	45,704	45,702	+ 2	— 2,6	— 0,6	— 0,09	0,009		0,37
36	354—355	45,962	45,955	+ 7	— 2,6	+ 4,4	+ 0,65	0,422		0,43
37	307—308	46,843	46,839	+ 4	— 2,6	+ 1,4	+ 0,21	0,043		0,49
38	296—297	47,273	47,271	+ 2	— 2,7	— 0,7	— 0,10	0,011		0,49
39	284—310	47,922	47,917	+ 5	— 2,7	+ 2,3	+ 0,33	0,111		0,49
40	353—354	56,582	56,573	+ 9	— 3,2	+ 5,8	+ 0,77	0,594		0,49
41	307—321	57,038	57,034	+ 4	— 3,2	+ 0,8	+ 0,10	0,011		0,50
42	117—118	57,234	57,227	+ 7	— 3,2	+ 3,8	+ 0,50	0,251		0,51
43	322—372	57,945	57,945	± 0	— 3,3	— 3,3	— 0,43	0,188		0,53
44	118—321	58,405	58,400	+ 5	— 3,3	+ 1,7	+ 0,22	0,050		0,53
45.	323—355	62,949	62,948	+ 1	— 3,6	— 2,6	— 0,33	0,108	4,381	0,60
46	117—317	67,629	67,624	+ 5	— 3,8	+ 1,2	+ 0,15	0,021		0,64
47	307—△ Gl.	68,437	68,431	+ 6	— 3,9	+ 2,1	+ 0,12	0,015		0,65
48	354—369	69,849	69,850	— 1	— 4,0	— 2,0	— 0,24	0,057		0,67
49	324—△ Z.	70,582	70,580	+ 2	— 4,0	— 5,0	— 0,60	0,358		0,67
50	317—△ Gl.	70,732	70,720	+ 12	— 4,0	+ 8,0	+ 0,95	0,904		0,67
51	326—327	72,251	72,244	+ 7	— 4,1	+ 2,9	+ 0,34	0,116		0,77
52	325—326	75,475	75,468	+ 7	— 4,3	+ 2,7	+ 0,31	0,097		0,83
53	324—325	77,216	77,206	+ 10	— 4,4	+ 5,6	+ 0,64	0,406		0,95
54	117—353	92,319	92,304	+ 15	— 5,2	+ 9,8	+ 1,02	1,040		1,02
n = 54		2382,923	2382,783	+ 140	— 134,7	+ 66,9	[+] 8,69	4,820 = [+ v'²]		Max.-
						— 61,6	[—] 9,84	4,893 = [— v'²]		fehler M
						+ 5,3	[±] 18,53	9,713		= ± 1,02
							$t = \pm \frac{18,53}{54}$	$m = \sqrt{\frac{9,713}{53}}$		
							t = ± 0,343	= ± 0,428		

Unterschied der beiden Summen gebildet wird. Derselbe muss gleich sein der algebraischen Summe aller d. Im vorgeführten Beispiel beträgt dieser Unterschied + 140 mm. Da er einer Messungslänge von 2383 m entspricht, ergibt sich der regelmässige Fehler pro Meter zu $r_1 = +0{,}0588$ mm. Auf gleiche Weise berechnete ich den regelmässigen Fehler der Differenzen B—A und C—B. Stellt man alle drei Werte für r zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} r_1 &= +0{,}0588 \text{ mm}, \\ r_2 &= +0{,}0317 \text{ mm}, \\ r_3 &= -0{,}0845 \text{ mm}, \\ \hline \text{Summa} &= +0{,}0060 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Wie eine einfache Ueberlegung ergibt, sollte, wenn keine zufälligen Fehler mitwirken würden, die Summe der drei Werte r Null sein. Statt dessen zeigt sich der kleine Widerspruch $w = +0{,}0060$ mm. Die Verteilung desselben auf die einzelnen Werte r hat im Verhältnis der Gewichtsreziproken $\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{[s]}\right)$ zu geschehen. Sodann erhält man:

$$\begin{aligned} r_1' &= +0{,}0565 \text{ mm}, \\ r_2' &= +0{,}0299 \text{ mm}, \\ r_3' &= -0{,}0864 \text{ mm}, \\ \hline \text{Summa} &= 0{,}0000 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser ausgeglichenen Werte r ist nun für jede Differenz d der regelmässige Fehleranteil r_d berechnet worden nach der Formel $r_d = s \cdot r_1'$ (vergl. Kolonne 5 der Tabelle). Subtrahiert man die Werte r_d von den Differenzen d, so erhält man die in Kolonne 6 enthaltenen Grössen, welche die zufälligen Messungsfehler darstellen. Deren Summe ist wegen der Ausgleichung der Werte r nicht gleich Null, sondern + 5,3 mm. Ob die Fehler v wirklich als zufällige Fehler angesehen werden können, soll weiter unten einlässlicher untersucht werden. Schon ein flüchtiger Blick auf die Vorzeichen der v deutet indessen darauf hin, dass ein regelmässiger Fehler kaum mehr vorhanden ist.

Zur Berechnung der verschiedenen Fehlerarten, auf welche ich nun ausgehe, können die Fehler v direkt nicht dienen, sondern sie müssen zuerst auf die Längeneinheit reduziert werden. Unter der schon oben gemachten Voraussetzung, dass die v mit $\sqrt{s}$ wachsen, geschieht dies bekanntlich durch Division mit $\sqrt{s}$. Die so reduzierten zufälligen Fehler sind in Kolonne 7 enthalten und mit v' bezeichnet. Die für die Berechnung des mittleren Fehlers m erforderliche Quadrierung der v' hat zu den Werten der 6. Kolonne geführt. Um schliesslich den wahrscheinlichen Fehler $\int$ durch Abzählen zu erhalten, sind die Fehler v' in der letzten Kolonne ihrer Grösse nach geordnet worden. Bekanntlich ist dieser Fehler in der Mitte einer so geordneten Fehlerreihe zu suchen. Zu einem annähernd gleich zuverlässigen Wert für $\int$ gelangt man auch durch Abzählen des *doppelten* wahrscheinlichen Fehlers. In einer Reihe von hundert Fehlern ist dies der 82. Fehler; in der vorstehenden Reihe, bei welcher n = 54 ist, wird $2\int$ daher an der Stelle des 44. Fehlers gefunden. Die beiden Berechnungen ergeben:

$$\int = \pm \frac{0{,}31 + 0{,}32}{2} = \pm\, 0{,}315 \text{ mm},$$

$$2\int = \pm\, 0{,}53 \text{ mm}, \quad \int = 0{,}265 \text{ mm}.$$

Die neunte Kolonne dient auch zur Bestimmung der Häufigkeit, mit welcher die zwischen bestimmten Grenzen liegenden Fehler auftreten.

Nach den am Fusse der Tabelle ausgeführten Berechnungen beträgt:

der mittlere Fehler $m = \pm\, 0{,}428$ mm

der durchschnittliche Fehler $t = \pm\, 0{,}343$ mm

der wahrscheinliche Fehler $\int = \pm \frac{0{,}315 + 0{,}265}{2} = \pm\, 0{,}29$ mm

der Maximalfehler $M = +\, 1{,}02$ mm.

Alle diese Genauigkeitsmasse beziehen sich also auf den zufälligen Fehleranteil der Differenzen d pro Meter.

Gestützt auf die bisher erhaltenen Resultate soll nun in einlässlicherer Weise untersucht werden, ob die Fehler v' tatsächlich als zufällige, das Gesetz von Gauss befolgende Fehler angesehen werden können. Zu diesem Zwecke will ich die einfacheren Kriterien des Zufalls anwenden:

1. Die Anzahl der positiven Fehler soll gleich sein der Anzahl der negativen. Uebergeht man beim Zählen den Fehler $\pm\, 0{,}00$, so findet man:

Anzahl der positiven Fehler	25
Anzahl der negativen Fehler	28
Unterschied	3

Dieser Unterschied ist wesentlich kleiner als der zu erwartende mittlere Unterschied von $\sqrt{54} = 7$ bis 8.

2. Das Vorzeichen soll beim Durchlaufen der Fehlerreihe ebenso oft wechseln, wie es nicht wechselt. Man erhält:

Anzahl der Zeichenwechsel	26
Anzahl der Zeichenfolgen	27
Unterschied	1

Das Abzählen der Fehler hat zweimal zu geschehen; das eine Mal ist dabei dem Fehler $\pm 0{,}00$ das positive, das andere Mal das negative Zeichen vorzusetzen. Aus beiden Ergebnissen ist das arithmetische Mittel zu nehmen. Der hier zu erwartende mittlere Unterschied beträgt $\sqrt{53} = 7$ bis 8.

3. Für zufällige Fehler gilt die Bedingung, dass die Summe der Quadrate der positiven Fehler gleich ist der Summe der Quadrate der negativen Fehler. Diese Summen finden sich am Fusse der Kolonne 8. Es beträgt:

Die Summe der Quadrate der positiven Fehler	4,820
Die Summe der Quadrate der negativen Fehler	4,893
Unterschied	0,073

Dieser Unterschied ist sehr klein im Vergleich zum mittleren Unterschied, der von vorneherein zu $\sqrt{[v'^4]} = 2{,}11$ anzunehmen ist.

NB. Die Bedingung, dass die Summe der positiven und negativen v' (ohne Quadrierung) gleich Null sei, kann beim vorliegenden Beispiel nicht als Kriterium angewendet werden, da sie bei Berechnung des regelmässigen Fehlers r zwangsweise erfüllt und nur wegen der Ausgleichung der für r berechneten drei Werte zu $+$ 5,3 mm erhalten wurde.

4. Um zu konstatieren, wie gross der in einer Fehlerreihe zu erwartende *Maximalfehler* sei, habe ich auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Tabelle berechnet:

Bei einer Reihe von	beträgt der zu erwartende Maximalfehler das
10 Fehlern	1,96-fache des mittleren Fehlers
20 „	2,24- „ „ „ „
30 „	2,39- „ „ „ „
40 „	2,50- „ „ „ „
50 „	2,58- „ „ „ „

Bei einer Reihe von	beträgt der zu erwartende Maximalfehler das
60 Fehlern	2,64-fache des mittleren Fehlers
80 „	2,73- „ „ „ „
100 „	2,81- „ „ „ „
150 „	2,94- „ „ „ „
250 „	3,09- „ „ „ „
500 „	3,30- „ „ „ „

Bei dieser Untersuchung und den nachfolgenden hat an Stelle des mittleren Fehlers $\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$ der Wert $\sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} = \sqrt{\frac{9{,}713}{54}} = \pm 0{,}424$ zu treten, da es sich um die Prüfung des Verhaltens *der Fehler unter sich* handelt. Der zu erwartende Maximalfehler ergibt sich nun an Hand der gegebenen Tabelle zu $M = 2{,}60 \times 0{,}424 = 1{,}10$. In Wirklichkeit beträgt er 1,02. Es gibt danach kein Fehler v′ zu irgendwelchen Bedenken Anlass. Würde aber der vorkommende grösste Fehler wesentlich grösser sein, als der gemäss Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartende Maximalfehler, dann müsste auf eine Störung in den betreffenden Messungen geschlossen und eine Nachmessung vorgenommen werden. Diese Nachmessung wäre auch dann zu empfehlen, wenn der Fehler noch innerhalb des Toleranzwertes liegen würde. Die Beurteilung der Fehlerreihe müsste dann mit Ausschluss der entsprechenden Messungsdifferenz d von Anfang an neu gemacht werden.

5. Die Untersuchung des Verhältnisses zwischen dem mittleren Fehler einerseits und dem durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler anderseits führt zu folgendem Ergebnis:

	Verhältnis nach Theorie	in Wirklichkeit
$\frac{t}{m} =$	0,80	$\frac{0{,}343}{0{,}424} = 0{,}81$
$\frac{\int}{m} =$	0,67	$\frac{0{,}29}{0{,}424} = 0{,}68$

Die Uebereinstimmung ist hier eine vorzügliche.

6. Zur Bestimmung der Häufigkeit, mit welcher die zwischen bestimmten Grenzen liegenden Fehler nach dem Gauss'schen

Gesetz auftreten, dient folgende, auf 1000 Fehler sich beziehende Tabelle:

Es liegen zwischen den Grenzen	Anzahl der Fehler
0 und 0,5 m	383
0,5 und 1,0 m	300
1,0 und 1,5 m	183
1,5 und 2,0 m	88
2,0 und 2,5 m	34
2,5 und 3,0 m	9

Um diese Tabelle für den vorliegenden Fall, wo $n = 54$, anwenden zu können, sind die Häufigkeitszahlen mit $\frac{54}{1000}$ zu multiplizieren. Man erhält sodann:

Grenzen	Häufigkeit der Fehler nach Theorie	in Wirklichkeit
0,0 und 0,5 m	21	20
0,5 und 1,0 m	16	15
1,0 und 1,5 m	10	11
1,5 und 2,0 m	5	6
2,0 und 2,5 m	2	2
2,5 und 3,0 m	0	0

Es ist dies eine sehr schöne Uebereinstimmung.

Sämtliche bisher auf die Reihe der Fehler v' angewendeten Kriterien des Zufalls lassen auf einen *ausgesprochen zufälligen Charakter* schliessen. Und doch krankt die Berechnung des regelmässigen und des zufälligen Messungsfehlers in einem wichtigen Punkte, wie sich aus folgendem ergibt:

7. Wenn die Fehler v' rein zufällige Fehler sind, so müssen verschiedene, beliebig gewählte Gruppen der Kolonne 7 annähernd den gleichen Mittelwert geben. Nimmt man die Fehlerquadrate mit den laufenden Nummern 1—18, 19—36, 37—54 als Gruppen heraus und berechnet aus jeder den Mittelwert, so erhält man

$$m_{1-18} = \sqrt{\frac{1,854}{18}} = \pm 0,321 \qquad m_{19-36} = \sqrt{\frac{3,478}{18}} = \pm 0,440$$

$$m_{37-54} = \sqrt{\frac{4,381}{18}} = \pm 0,495$$

Diese drei Werte sind wesentlich verschieden, wodurch angezeigt wird, dass es ungenau war, die zufälligen Fehler als mit

$\sqrt{s}$ wachsend anzunehmen. Weitergehende Untersuchungen haben gezeigt, dass das Gesetz der zufälligen Fehler richtiger durch den allgemeinen Ausdruck $\sqrt{a\,S^2 + b\,S}$ dargestellt wird. Im vorliegenden Falle soll von einer Aenderung der ganzen Rechnung Umgang genommen werden. In solchen Fällen aber, wo es sich um die Ermittlung von Grössen handelt, die weiter verwendet werden, wie z. B. bei der Konstantenbestimmung für die Präzisionstachymetrie, muss untersucht werden, welches Gesetz für die zufälligen Fehler das richtige ist und es muss dann in der Regel die Rechnung ein zweites Mal durchgeführt werden. Würde man dies beim behandelten Beispiel tun, so würden die Resultate für den regelmässigen und zufälligen Messungsfehler natürlich um kleine Beträge ändern. Die übrig bleibenden Fehler dürften die aufgestellten Bedingungen 1—6 des Zufalls kaum weniger gut erfüllen, als dies vorstehend der Fall ist.

Wie schon oben angeführt, kommt für die *Prüfung der Differenzen d* die eidgenössische Toleranz

$$T = 0{,}003\,\sqrt{s} + 0{,}0001 \cdot s$$

in Betracht und zwar wegen der in Fluntern vorherrschend starken Steigung des Terrains. Diese Formel kann nun aber nicht unverändert zur Anwendung gelangen. Nach dem Wortlaut der Instruktion bezieht sie sich nämlich auf die Differenz zwischen zwei Einzelmessungen, während unsere Differenzen das Mittel je zweier Doppelmessungen darstellen. Soweit das Formelglied für den regelmässigen Fehler in Betracht kommt, ändert das am Ausdruck nichts; dagegen ist das Glied, welches den zufälligen Fehleranteil darstellt, im Verhältnis von $1 : \sqrt{2}$ zu reduzieren. Die Toleranzformel lautet dann folgendermassen:

$$T = \frac{0{,}003}{\sqrt{2}}\,\sqrt{s} + 0{,}0001 \cdot s.$$

Diesem Toleranzwerte haftet, wie schon eingangs erwähnt, ein prinzipieller Mangel an, weil er keine Rücksicht auf das Vorzeichen der Differenzen d nimmt. Doch findet sich ein Ausweg in der Weise, dass man die zufälligen und regelmässigen Fehler getrennt beurteilt. Für unser Beispiel wurde der regelmässige Fehler erhalten zu

$$r_1' = 0{,}0000565\ s.$$

Dies ist etwas mehr als die Hälfte des zweiten Gliedes der Toleranz. Für die Beurteilung der Qualität der Messungen kommt nun nicht so sehr in Betracht, ob der regelmässige Fehler etwas kleiner oder grösser ist, sondern vor allem, wie gross der *zufällige* Messungsfehler ist. Denn ein etwas grösserer regelmässiger Fehler ist durchaus nicht immer das Merkmal einer flüchtigen Messung.

Der zufällige Fehler ergibt sich zu

$$m = \pm 0{,}000428 \sqrt{s},$$

welcher Betrag etwa den fünften Teil des ersten Toleranzgliedes ausmacht. Hiernach müssen die Messungen als äusserst sorgfältige bezeichnet werden.

Im Anschlusse an diese Fehleruntersuchungen möchte ich noch bemerken, dass die aus dem Instruktionsgebiet II zu entnehmenden Beispiele sich im allgemeinen weniger zu theoretischen Fehlerbetrachtungen eignen, weil die dort üblichen Abrundungen der Ergebnisse (bei Längenmessungen auf halbe oder ganze Zentimeter) die Messungsfehler allzusehr entstellen. In allen den Fällen aber, wo die Ablesegenauigkeit im Einklang mit der Messungsgenauigkeit steht, habe ich mit wenigen Ausnahmen die nämliche Uebereinstimmung von Theorie und Praxis feststellen können, wie beim behandelten Beispiel.

Die Fehlergrenzen der sächsischen Landmesserordnung vom 1. Oktober 1915.

Die nachfolgend mitgeteilten Fehlergrenzen dürfen für Arbeiten, die ein höheres Mass von Genauigkeit erfordern, insbesondere für die Zwecke des Grundbuches, nicht überschritten werden. Als „gut“ ist eine Arbeit solcher Art nur zu betrachten, wenn die vorgeschriebenen Fehlergrenzen nur vereinzelt ganz oder nahezu erreicht werden.

1. *Längenmessungen.*

a) Für Strecken zwischen sicher bezeichneten Endpunkten darf die Abweichung zweier Messungen einer Strecke s höchstens betragen:

$d = 0{,}02 + 0{,}0041 \sqrt{s} + 0{,}00044\, s$ in günstigem Gelände,

$d = 0{,}02 + 0{,}0115 \sqrt{s} + 0{,}00050\, s$ in ungünstigem Gelände.