Eine Ausgleichungsaufgabe [Schluss]

Eine Ausgleichungsaufgabe.

(Schluß.)

Im Hinblick darauf, daß wir früher bei den Taylor'schen Entwicklungen nur die Glieder erster Ordnung in den Koordinatendifferenzen berücksichtigt haben, sind wir berechtigt, unsere Differenzenbetrachtungen durch Differentialbetrachtungen erster Ordnung zu ersetzen. Das bedingt, daß wir

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\overline{x_i},\, \overline{y_i}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_i,\, y_i} = f_i$$

$$\left(\frac{\partial F}{d y}\right)_{\overline{x_i},\, \overline{y_i}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_i,\, y_i} = f'_i$$

setzen dürfen.

Es ist

$$x_i = \overline{x_i} + \varDelta x_i; \qquad y_i = \overline{y_i} + \varDelta y_i. \tag{22}$$

Daraus folgt:

$$F(A, B, C \ldots \overline{x_i}, \overline{y_i}) = F(A, B, C \ldots x_i - \varDelta x_i,\ y_i - \varDelta y_i)$$

$$= F(A, B, C \ldots x_i\, y_i) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_i\, y_i} \Delta x_i - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_i\, y_i} \varDelta y_i = 0.$$

Nun ist aber entsprechend Gleichung (6^1)

$$F(A_0 + \varDelta A,\ B_0 + \varDelta B,\ C_0 + \varDelta C \ldots x_i + v_i,\ y_i + v'_i) =$$
$$w_i + a_i \varDelta A + b_i \varDelta B + c_i \varDelta C + f_i v_i + f'_i v'_i = 0.$$

Daher ist, unter Beachtung von Gleichung (15):

$$F(A, B, C \ldots x_i, y_i) = w_i + a_i \varDelta A + b_i \varDelta B + c_i \varDelta C = -\lambda_i$$

da ja hier v_i und v'_i gleich 0 sind.

Wir finden daher:

$$F(A, B, C \ldots \overline{x_i}, \overline{y_i}) = -\lambda_i - f_i \varDelta x_i - f'_i \varDelta y_i = 0. \tag{23}$$

Daneben bestehen noch die Gleichungen (21), die wir auch schreiben können:

$$\varDelta x_i = -K f_i; \qquad \varDelta y_i = -K f'_i.$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen eliminieren wir K und berechnen $\varDelta x_i$ und $\varDelta y_i$ und finden:

$$\varDelta x_i = \frac{f_i}{f_i^2 + f'^2_i} \lambda_i; \qquad \varDelta y_i = \frac{f'_i}{f_i^2 + f'^2_i} \lambda_i. \tag{24}$$

Nun ist aber

$$\rho_i^2 = \varDelta x_i^2 + \varDelta y_i^2 = \lambda_i^2 \frac{f_i^2 + f'^2_i}{(f_i^2 + f'^2_i)^2} = \frac{\lambda_i^2}{f_i^2 + f'^2_i}$$

Daraus folgt aber Gleichung (20).

Da $$\lambda_i = -f_i\, v_i - f'_i\, v'_i$$
nach Gleichung (14) ist, so finden wir auch

$$\rho_i = -\frac{f_i}{\sqrt{f_i^2 + f'^2_i}}\, v_i - \frac{f'_i}{\sqrt{f_i^2 + f'^2_i}}\, v'_i \tag{25}$$

und daraus das Gewicht von ρ_i, bezeichnet mit q_i, nach einer leichten Zwischenrechnung

$$q_i = (f_i^2 + f'^2_i)\, g_i. \tag{26}$$

Damit finden wir:

$$q_i\, \rho_i^2 = g_i\, \lambda_i^2$$

und daraus

$$[q\, \rho\rho] = [g\, \lambda\lambda]. \tag{27}$$

Nun ist aber, wie man aus dem Frühern erkennt, $[g\, \lambda\lambda]$ ein Minimum; damit ist bewiesen, daß auch $[q\, \varphi\varphi]$ ein Minimum ist.

Wir haben also

$$[q\, \rho\rho] = \text{Minimum}, \tag{28}$$

wobei

$$q_i = \frac{f_i^2 + f'^2_i}{\dfrac{f_i^2}{p_i} + \dfrac{f'^2_i}{p'_i}} \tag{29}$$

und ρ_i der Abstand des Punktes P_i (x_i, y_i) von der durch die Ausgleichung gelieferten Kurve $F(A, B, C \ldots x, y) = 0$ ist.

Sofern wir die Gewichte der Koordinatenmessungen alle als gleich und dann durch geeignete Wahl der Gewichtseinheit als 1 annehmen können, kommt also die im vorstehenden betrachtete Ausgleichung darauf hinaus, die Kurve $F(A, B, C \ldots x, y) = 0$ durch geeignete Wahl der Konstanten A, B, C.. so festzulegen, daß die Summe der Abstandsquadrate der vorliegenden Punkte von der Kurve zu einem Minimum gemacht wird.

Wir erkennen aus dem Vorliegenden, daß die von Herrn Schumann behandelten Lösungen der „Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte“ zum Teil eine unrichtige Anwendung der Grundprinzipien der Methode der kleinsten Quadrate darstellen; dagegen ist die Lösung, welche sich auf die Normalform der Gleichung der Geraden stützt, durchaus richtig, indem durch sie die Summe der Abstandsquadrate der durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte von der ausgeglichenen Geraden zu einem Minimum gemacht wird.

Zollikon, im Februar 1919. *F. Baeschlin.*