

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 17 (1919)

Heft: 11

Artikel: Eine Ausgleichungsaufgabe [Schluss]

Autor: Baeschlin, F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-185596>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine Ausgleichungsaufgabe.

(Schluß.)

Im Hinblick darauf, daß wir früher bei den Taylor'schen Entwicklungen nur die Glieder erster Ordnung in den Koordinatendifferenzen berücksichtigt haben, sind wir berechtigt, unsere Differenzenbetrachtungen durch Differentialbetrachtungen erster Ordnung zu ersetzen. Das bedingt, daß wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x}_i, \bar{y}_i} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_i, y_i} = f_i \\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{x}_i, \bar{y}_i} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_i, y_i} = f'_i \end{aligned}$$

setzen dürfen.

Es ist

$$x_i = \bar{x}_i + \Delta x_i; \quad y_i = \bar{y}_i + \Delta y_i. \quad (22)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F(A, B, C \dots \bar{x}_i, \bar{y}_i) &= F(A, B, C \dots x_i - \Delta x_i, y_i - \Delta y_i) \\ &= F(A, B, C \dots x_i, y_i) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_i, y_i} \Delta x_i - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_i, y_i} \Delta y_i = 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber entsprechend Gleichung (6¹)

$$F(A_0 + \Delta A, B_0 + \Delta B, C_0 + \Delta C \dots x_i + v_i, y_i + v'_i) = w_i + a_i \Delta A + b_i \Delta B + c_i \Delta C + f_i v_i + f'_i v'_i = 0.$$

Daher ist, unter Beachtung von Gleichung (15):

$$F(A, B, C \dots x_i, y_i) = w_i + a_i \Delta A + b_i \Delta B + c_i \Delta C = -\lambda_i$$

da ja hier v_i und v'_i gleich 0 sind.

Wir finden daher:

$$F(A, B, C \dots \bar{x}_i, \bar{y}_i) = -\lambda_i - f_i \Delta x_i - f'_i \Delta y_i = 0. \quad (23)$$

Daneben bestehen noch die Gleichungen (21), die wir auch schreiben können:

$$\Delta x_i = -K f_i; \quad \Delta y_i = -K f'_i.$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen eliminieren wir K und berechnen Δx_i und Δy_i und finden:

$$\Delta x_i = \frac{f_i}{f_i^2 + f_i'^2} \lambda_i; \quad \Delta y_i = \frac{f'_i}{f_i^2 + f_i'^2} \lambda_i. \quad (24)$$

Nun ist aber

$$\rho_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 = \lambda_i^2 \frac{f_i^2 + f_i'^2}{(f_i^2 + f_i'^2)^2} = \frac{\lambda_i^2}{f_i^2 + f_i'^2}$$

Daraus folgt aber Gleichung (20).

Da $\lambda_i = -f_i v_i - f'_i v'_i$
 nach Gleichung (14) ist, so finden wir auch

$$\rho_i = -\frac{f_i}{\sqrt{f_i^2 + f'_i{}^2}} v_i - \frac{f'_i}{\sqrt{f_i^2 + f'_i{}^2}} v'_i \quad (25)$$

und daraus das Gewicht von ρ_i , bezeichnet mit q_i , nach einer leichten Zwischenrechnung

$$q_i = (f_i^2 + f'_i{}^2) g_i. \quad (26)$$

Damit finden wir:

$$q_i \rho_i^2 = g_i \lambda_i^2$$

und daraus

$$[q \rho\rho] = [g \lambda\lambda]. \quad (27)$$

Nun ist aber, wie man aus dem Früheren erkennt, $[g \lambda\lambda]$ ein Minimum; damit ist bewiesen, daß auch $[q \varphi\varphi]$ ein Minimum ist.

Wir haben also

$$[q \rho\rho] = \text{Minimum}, \quad (28)$$

wobei

$$q_i = \frac{f_i^2 + f'_i{}^2}{\frac{f_i^2}{\rho_i} + \frac{f'_i{}^2}{\rho'_i}} \quad (29)$$

und ρ_i der Abstand des Punktes $P_i (x_i, y_i)$ von der durch die Ausgleichung gelieferten Kurve $F(A, B, C \dots x, y) = 0$ ist.

Sofern wir die Gewichte der Koordinatenmessungen alle als gleich und dann durch geeignete Wahl der Gewichtseinheit als 1 annehmen können, kommt also die im vorstehenden betrachtete Ausgleichung darauf hinaus, die Kurve $F(A, B, C \dots x, y) = 0$ durch geeignete Wahl der Konstanten $A, B, C \dots$ so festzulegen, daß die Summe der Abstandsquadrate der vorliegenden Punkte von der Kurve zu einem Minimum gemacht wird.

Wir erkennen aus dem Vorliegenden, daß die von Herrn Schumann behandelten Lösungen der „Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte“ zum Teil eine unrichtige Anwendung der Grundprinzipien der Methode der kleinsten Quadrate darstellen; dagegen ist die Lösung, welche sich auf die Normalform der Gleichung der Geraden stützt, durchaus richtig, indem durch sie die Summe der Abstandsquadrate der durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte von der ausgeglichenen Geraden zu einem Minimum gemacht wird.

Zollikon, im Februar 1919.

F. Baeschlin.