Bestimmung der Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschneiden [Schluss]

Bestimmung der Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschneiden.

(Schluß.)

Führt man die Ausdrücke (8)—(11) in die Formen [a a], [b b] und [a b] ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
[a\,a] &= \frac{y^2}{\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}\\
[b\,b] &= \frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}+\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}\\
[a\,b] &= -\left\{\frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)y}{\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}+\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)y}{\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Führen wir die Werte von (24) in die Formeln (19) und (22) oder (23) ein, so ist die Fehlerellipse bestimmt.

Beispiel.

$c = 1000$ Meter.

$y_0 = 10\,000$ Meter, $x_0 = 5500$ Meter.

$\mu = 1'$

$N_1 = 61^0\,37'\,46''$, $N_2 = 151^0\,37'\,46''$.

$Q_1 = \pm 13.0$ Meter; $Q_2 = \pm 1.3$ Meter.

Den Formeln (22) oder (23) kann noch eine andere Form gegeben werden.

Bekanntlich ist:

$$\operatorname{cotg} 2N = \frac{\operatorname{cotg} N - \operatorname{tg} N}{2} \qquad (25)$$

Daraus folgt die quadratische Gleichung:

$$\operatorname{cotg}^2 N - 2 \operatorname{cotg} 2N \operatorname{cotg} N - 1 = 0.$$

Die Auflösung nach cotg N ergibt:

$$\operatorname{cotg} N = \operatorname{cotg} 2N \pm \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2N} \qquad (26)$$

Setzt man für cotg 2 N den Ausdruck (19) ein, so folgt:

$$\operatorname{cotg} N = \frac{[b\,b]-[a\,a]}{2\,[a\,b]} \pm \sqrt{1+\left\{\frac{[b\,b]-[a\,a]}{2\,[a\,b]}\right\}^2}$$

Damit nehmen die Formeln (22) die Form an:

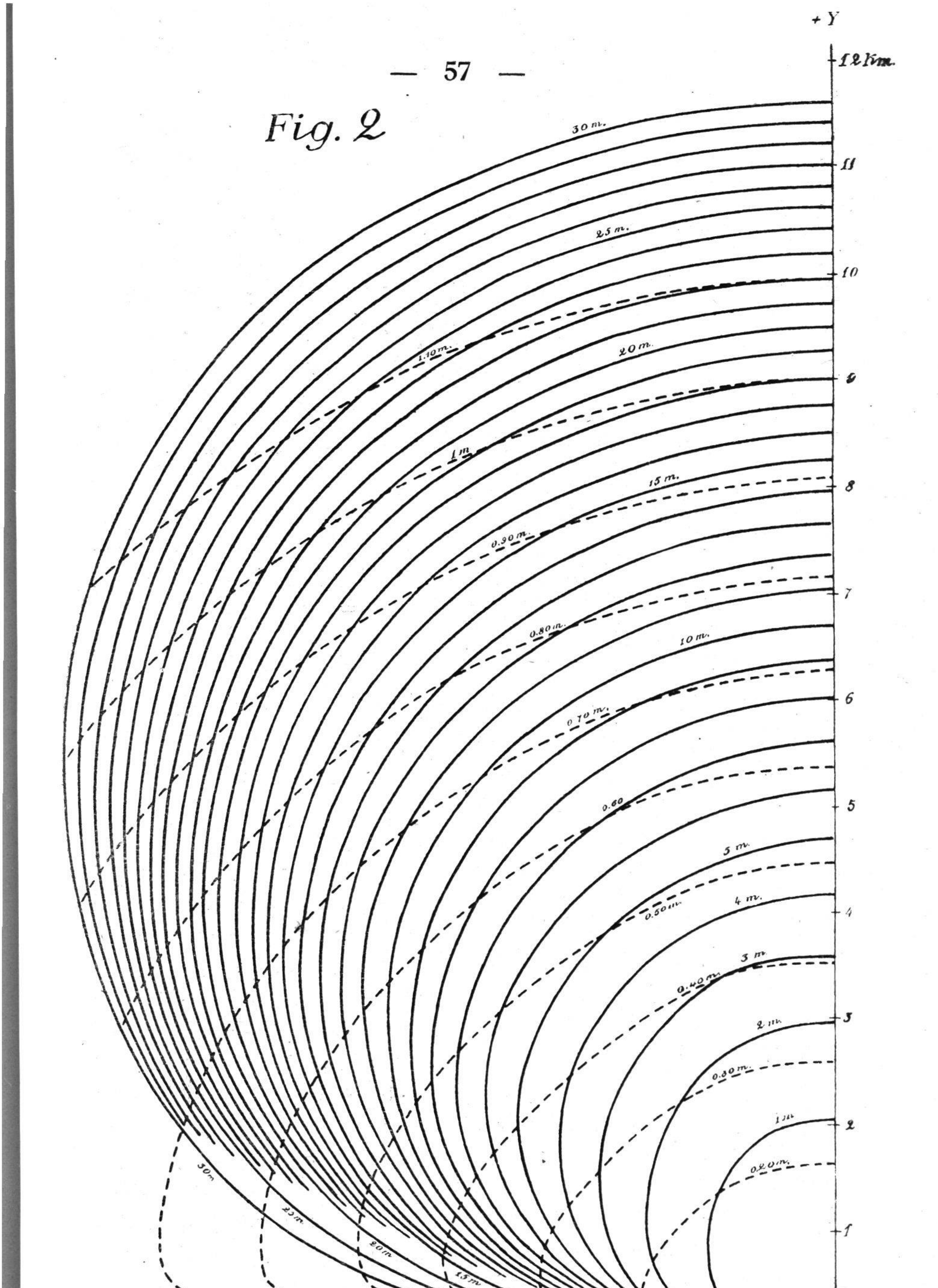
$$A_{1\,\text{und}\,2} = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\frac{[aa]+[bb]}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\,[ab]^2 + \{[bb]-[aa]\}^2}}{[aa]\,[bb]-[ab]^2}} \qquad (27)$$

Mit Hilfe dieser Formel, in der [a a], [b b] und [a b] durch die Ausdrücke (24) zu ersetzen sind, kann man die Aufgabe lösen, die Kurven zu bestimmen, welche Punkte mit gleicher großer oder kleiner Axe der mittleren Fehlerellipse miteinander verbinden.

In der nachstehenden Gleichung der Kurven gleicher Halbaxen der mittleren Fehlerellipse bedeutet a die Halbaxe und zwar ist überall das obere Vorzeichen zu nehmen, wenn es sich um die große Halbaxe, das untere, wenn es sich um die kleine Halbaxe handelt.

$$\begin{aligned}
&\frac{4a^4\rho^4c^4y^4}{\mu^4} - \frac{4a^2\rho^2c^2y^2}{\mu^2}\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \\
&- \frac{4a^2\rho^2c^2y^2}{\mu^2}\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right] \\
&+ \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 + \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \\
&\qquad \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \\
&+ 2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^3\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^3 \\
&\mp 4\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 y^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \mp 4\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 y^2 \qquad (28) \\
&\qquad \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \\
&\mp 8\left(x+\frac{c}{2}\right)\left(x-\frac{c}{2}\right)y^2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \\
&\mp \left(x+\frac{c}{2}\right)^4\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \mp \left(x-\frac{c}{2}\right)^4\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \\
&\mp y^4\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \mp y^4\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4 \\
&\mp 2\left(x+\frac{c}{2}\right)^2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2
\end{aligned}$$

Fig. 2


+Y
12 Km.
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
30 m.
25 m.
20 m.
15 m.
10 m.
5 m.
4 m.
3 m.
2 m.
1 m.
1.10 m.
1 m
0.90 m.
0.80 m.
0.70 m.
0.60
0.50 m.
0.40 m.
0.30 m.
0.20 m.
+X
7
6
5
4
3
2
1 Km.
A
B

$$\pm 2\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 y^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4$$

$$\pm 2\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 y^2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2$$

$$\pm 2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 y^2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2$$

$$\pm 2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 y^2\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4$$

$$\mp 2\, y^4\left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2\left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 = 0.$$

Für Ueberschlagsbetrachtungen genügt es anzunehmen, die große Axe gehe vom Außenpunkt nach der Mitte der Basis c.

Figur 2 zeigt ausgezogen die Kurven für die großen Halbaxen, punktiert die Kurven für die kleinen Halbaxen für den Fall $\mu = 1'$ (Minute centesimal) und $c = 1000$ Meter.

Zollikon, im Oktober 1920. *F. Baeschlin.*

Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von *E. Hammer*, Stuttgart.

Die folgenden Zeilen geben Bemerkungen zu zwei Ausgleichungsaufgaben, die *Eggert* in seine neue, wesentlich erweiterte Bearbeitung des ersten Bandes des *Jordan*schen Handbuchs der Vermessungskunde (7. Auflage, 1920) aufgenommen hat; die eine als einfaches Beispiel für *vermittelnde* Bestimmung zweier Unbekannten bei nichtlinearem Zusammenhang zwischen ihnen und den Messungen, die zweite als ebenso einfaches Beispiel für direkte *bedingte* Messungen. Meine Bemerkungen sind z. T. didaktischer Art, z. T. aber wohl auch für solche Leser von Interesse, die schon weiter in die Ausgleichungsrechnung eingedrungen sind.

I. Die *erste* der genannten Aufgaben (a. a. O. S. 72) ist die Berechnung der Koordinaten eines Lagepunktes in einem System gegebener Punkte durch «mehrfachen Bogenschnitt», wie der in Norddeutschland beliebte Ausdruck lautet. Die Aufgabe ist als ansprechendes einfaches Beispiel für vermittelnde Bestimmung zweier Unbekannten bei zunächst nichtlinearen Verbesserungsgleichungen viel behandelt worden, von *Koll* in der preußischen «Anweisung IX», von *Eggert* a. eben a. O., rech-